

Titre: Evaluation de la méthode conventionnelle et de la méthode
réciproque pour la résolution du problème direct en
électroencéphalographie

Auteur: Stefan Finke

Date: 1998

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Finke, S. (1998). Evaluation de la méthode conventionnelle et de la méthode
réciproque pour la résolution du problème direct en électroencéphalographie
Citation: [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
<https://publications.polymtl.ca/6767/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/6767/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉVALUATION DE LA MÉTHODE CONVENTIONNELLE ET DE LA MÉTHODE
RÉCIPROQUE POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT EN
ÉLECTROENCÉPHALOGRAPHIE

STEFAN FINKE

INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE BIOMÉDICAL)

JUIN 1998

© Stefan Finke, 1998



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-37440-8

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ÉVALUATION DE LA MÉTHODE CONVENTIONNELLE ET DE LA MÉTHODE
RÉCIPROQUE POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT EN
ÉLECTROENCÉPHALOGRAPHIE

présenté par: FINKE Stefan

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. SAVARD Pierre, Ph.D., président

M. GULRAJANI Ramesh, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LEON Joshua, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier sincèrement mon directeur de recherche, le professeur Ramesh Gulrajani, pour son attention, sa rigueur et sa patience, mais surtout son esprit de recherche.

RÉSUMÉ

Le but à long terme de cette recherche est la localisation de lésions épileptiformes dans la planification d'une intervention chirurgicale pour des sujets épileptiques. L'importance clinique de l'électroencéphalographie peut être illustrée en considérant la localisation non invasive d'un site épileptique à partir de pics observables sur l'électroencéphalogramme (EEG) – soit le problème inverse. Cependant, le problème inverse demande une résolution préalable du problème direct, c'est-à-dire le calcul même des potentiels de surface générés par des sources neurales situées dans le cerveau. Ce projet traite deux méthodes bien distinctes pour la résolution du problème direct en électroencéphalographie: la méthode conventionnelle et la méthode réciproque. Les deux méthodes sont réalisées avec l'approche des éléments de frontière (BEM). Leurs précisions relatives, autant que leurs avantages et inconvénients sont évaluées en utilisant un modèle qui représente la tête humaine par un système de trois sphères concentriques. Les résultats de cette comparaison concordent avec ceux rapportés dans la littérature. Les méthodes sont aussi comparées dans le cadre de la résolution éventuelle du problème inverse, pour lequel la méthode réciproque promet d'être avantageuse.

ABSTRACT

The long-term objective of this research is the localisation of focal epileptic lesions in the planning of surgical interventions for epileptic patients. The clinical importance of electroencephalography is illustrated when considering the non-invasive localisation of an epileptic lesion using spikes observed on the electroencephalogram (EEG) – i.e., the inverse problem. However, the inverse problem requires a solution to the forward problem, i.e., the calculation of surface potentials generated by neuronal sources in the brain. This project deals with two distinct methods for the forward problem in electroencephalography : the conventional approach and the lead-field approach. These two approaches are implemented using the Boundary Element Method (BEM). Their relative precision, as well as their advantages and disadvantages, are evaluated using a three concentric sphere model of the human head. The results of this comparison agree with those presented in the literature. These methods are also compared in view of an eventual inverse problem resolution, for which the lead-field approach promises a number of advantages.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	iv
RÉSUMÉ.....	v
ABSTRACT.....	vi
TABLE DES MATIÈRES.....	vii
LISTE DES TABLEAUX.....	x
LISTE DES FIGURES.....	xi
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS.....	xvii
LISTE DES ANNEXES.....	xix
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION.....	1
1.1 Électroencéphalographie.....	1
1.2 Localisation de sites épileptiques.....	3

1.3	Équations fondamentales.....	8
1.4	Méthode conventionnelle pour la résolution du problème direct.....	9
1.5	Méthode réciproque pour la résolution du problème direct.....	11

CHAPITRE 2 : MÉTHODE CONVENTIONNELLE POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT.....15

2.1	Dérivation des équations.....	15
2.2	Discretisation des équations.....	23
2.2.1	Méthode du potentiel constant aux centroïdes de triangles plans.....	27
2.2.2	Méthode du potentiel linéaire aux sommets de triangles plans.....	30
2.3	Approche du problème isolé.....	38

CHAPITRE 3 : MÉTHODE RÉCIPROQUE POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT.....44

3.1	Dérivation des équations.....	44
3.2	Discretisation des équations.....	48
3.2.1	Méthode du potentiel constant aux centroïdes de triangles plans.....	52
3.2.2	Méthode du potentiel linéaire aux sommets de triangles plans.....	54
3.3	Résolution du système matricielle.....	60

CHAPITRE 4 : RÉSULTATS ET DISCUSSION.....	63
4.1 Modèle à trois sphères concentriques.....	63
4.2 Méthode conventionnelle pour la résolution du problème direct.....	65
4.3 Méthode réciproque pour la résolution du problème direct.....	73
4.4 Discussion.....	83
 CHAPITRE 5 : CONCLUSION.....	 89
 RÉFÉRENCES.....	 93

LISTE DES TABLEAUX

A.3.1	Quadrature de Gauss pour les triangles (Brebbia et al., 1984).....	108
A.3.2	Quadrature de Gauss pour les quadrilatères (Brebbia et al., 1984).....	114

LISTE DES FIGURES

1.1	Représentation schématique d'une section de la tête humaine, montrant le cortex, le liquide cérébro-spinal, le crâne et le cuir chevelu. Les électrodes de mesure pour électroencéphalogramme (EEG) sont placées sur le cuir chevelu. Une couche du cortex supérieur est illustrée, les vecteurs indiquant l'orientation des sources neurales, soit les dipôles équivalents.....	2
1.2.	Un dipôle équivalent pour un neurone. Les lignes pleines représentent le champ de courant, pendant que les lignes en pointillés représentent le champ de potentiel.....	4
1.3.	L'épilepsie focale : (a) représentation schématique du système 10-20 pour le placement d'électrodes en électroencéphalographie (EEG) et (b) EEG chez un sujet épileptique montrant des piques focaux dans la région centrale de droite. D'après Gevins et Aminoff (1988).....	6
1.4.	Deux techniques de calcul de la différence de potentiel V_i entre une paire d'électrodes i pour (a) la méthode conventionnelle et (b) la méthode réciproque. Les lignes en pointillés représentent schématiquement le champ de courant dans chaque cas.....	13

- 2.1. Diagramme qui illustre la dérivation de l'équation intégrale pour le potentiel dans le cas de surfaces multiples. Le théorème de Green est appliqué aux régions V_s de conductivité homogène et isotrope, limitée par les surfaces fermées S_s . En particulier, notons que S_1 renferme toutes les autres surfaces et que le nombre de surfaces est égale au nombre de volumes. R est un point arbitraire du volume conducteur caractérisé par le vecteur position \vec{r} , et \vec{r}' est le vecteur à l'élément variable d'intégration de volume dV' et l'élément variable d'intégration de surface dS' . Notons que $\sigma_1^+ = 0$ 16
- 2.2. Exemple d'un élément de discrétisation, illustrant les approximations décrites dans le texte pour : (a) la méthode des sommets avec une interpolation linéaire du potentiel et (b) la méthode des centroïdes avec un potentiel constant.....34
- 2.3. Illustration des zones manquantes dans le calcul des angles solides pour (a) la méthode des centroïdes avec un potentiel constant et (b) la méthode des sommets avec une interpolation linéaire du potentiel. Les parties foncées en (a) et (b) indiquent les zones où les quantités Ω et Ω^* , respectivement, sont nulles.....36
- 2.4. Représentation schématique d'un volume conducteur constitué de N surfaces fermées. Les surfaces sont représentées par des arcs mais peuvent être arbitraires. La

région ($m-1$) a une conductivité relativement basse et divise tout le volume conducteur en surfaces internes (S_s , $s = m$ à M) et externes (S_s , $s = 1$ à $m-1$).....	39
4.1. Cinq ordres de discrétisation : (a) 200 triangles par surface, (b) 400 triangles par surface, (c) 600 triangles par surface, (d) 800 triangles par surface, et (e) 1000 triangles par surface.....	64
4.2. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et PL'. Erreur relative (ER) sur les surfaces externe et interne du modèle à 3000 éléments par rapport à l'excentricité d'un dipôle radial sur (a) l'axe z et (b) l'axe x	67
4.3. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et PL'. Erreur relative (ER) sur les surfaces externe et interne du modèle à 3000 éléments par rapport à l'excentricité d'un dipôle tangentiel sur (a) l'axe z , et (b) l'axe x	68
4.4. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et PL'. Erreur relative (ER) sur les surfaces externe et interne d'un modèle à 600, 1200, 1800, 2400, et 3000 éléments pour un dipôle radial sur (a) l'axe z , et (b) l'axe x à une excentricité de 8.0 cm.....	71

4.5. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et PL'. Erreur relative (ER) sur les surfaces externe et interne d'un modèle à 600, 1200, 1800, 2400, et 3000 éléments pour un dipôle tangentiel sur (a) l'axe z , et (b) l'axe x à une excentricité de 8.0 cm.....	72
4.6. Schéma montrant les différentes positions d'électrode considérées. On s'intéresse à 4 paires d'électrodes : 1 et 5, 2 et 8, 3 et 7, et 4 et 6.....	75
4.7. Insertion de quadrilatères curvilignes aux sites d'injection de courant sur un modèle à 3000 éléments.....	76
4.8. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et réciproques RPC, RPL et RPLq. Écart d'erreur relative (EER) maximal sur le modèle à 3000 éléments par rapport à l'excentricité d'un dipôle radial sur (a) l'axe z , et (b) l'axe x	78
4.9. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et réciproques RPC, RPL et RPLq. Écart d'erreur relative (EER) maximal sur le modèle à 3000 éléments par rapport à l'excentricité d'un dipôle tangentiel sur (a) l'axe z , et (b) l'axe x	79

4.10. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et réciproques RPC, RPL et RPLq. Écart d'erreur relative (EER) maximal sur le modèle à 600, 1200, 1800, 2400, et 3000 éléments pour un dipôle radial sur (a) l'axe z , et (b) l'axe z à une excentricité de 8.0 cm.....	81
4.11. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et réciproques RPC, RPL et RPLq. Écart d'erreur relative (EER) maximal sur le modèle à 600, 1200, 1800, 2400, et 3000 éléments pour un dipôle tangentiel sur (a) l'axe z , et (b) l'axe z à une excentricité de 8.0 cm.....	82
A.2.1. Illustration de l'équation (A.2.2). Notons que \vec{r} est pris à l'origine.....	102
A.3.1. Triangle plan.....	106
A.3.2. Quadrilatère quadratique à 9 points.....	113
A.4.1. Définitions géométriques dans le cas d'un flux supposé constant sur un triangle plan. Le point o représente le centroïde du triangle et sert à diviser ce triangle en trois autres triangles d'aire μ_1 , μ_2 et μ_3 , respectivement. Notons que les aires μ_1 , μ_2 et μ_3 sont égaux. Un point arbitraire j est caractérisé par les coordonnées ϑ, θ	118

A.4.2. Définitions géométriques dans le cas d'un flux supposé linéaire sur un triangle plan. Notons que les perpendiculaires $a = \mathcal{G}(\theta) \sin(\theta + \alpha) = d_{31} \sin(\alpha)$,

$$b = \eta_1 d_{31} \sin(\beta) = \mathcal{G} \sin(\beta - \theta), \text{ et } c = \eta_2 d_{23} \sin(\beta) = \mathcal{G} \sin(\theta) \dots\dots\dots 121$$

A.4.3. Exemple de division de quadrilatères curviligne en triangles plans pour un point d'observation situé au coin 1 ($k_1 = 1$). Pour T_1 : $u = \mathcal{G} \cos \theta - 1$ et $v = \frac{8}{\pi} \theta - 1$; pour T_2

$$: u = \mathcal{G} \sin \theta - 1 \text{ et } v = \frac{8}{\pi} \theta - 3 \dots\dots\dots 125$$

A.5.1. Modèle à 3 sphères concentriques. La sphère S_1 de rayon r_1 représente la surface externe du cuir chevelu (de conductivité σ_1), la sphère S_2 de rayon r_2 représente la surface externe du crâne (de conductivité σ_2), et la sphère S_3 de rayon r_3 représente la surface externe du cerveau (de conductivité σ_3).....129

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

BEM : méthode des éléments de frontières ('Boundary Element Method');

CT : tomographie ('Computed Tomography');

EEG : électroencéphalogramme;

EER : écart d'erreur relative;

ER : erreur relative;

FEM : méthode des éléments finis ('Finite Element Method');

fMRI : imagerie fonctionnelle par résonance magnétique ('Functional Magnetic Resonance Imaging');

MEG : magnétoencéphalogramme;

MRI : imagerie par résonance magnétique ('Magnetic Resonance Imaging');

PC : méthode du potentiel constant aux centroïdes de triangles plans avec l'équation (2.18) pour l'angle solide;

PET : tomographie par émission de positrons ('Positron Emission Tomography');

PL : méthode du potentiel linéaire aux sommets de triangles plans avec l'équation (2.23) pour l'angle solide;

PL' : méthode PL avec la modification de Heller [1990] pour l'angle solide;

RPC : méthode PC employée pour l'approche réciproque;

RPL : méthode PL employée pour l'approche réciproque;

RPLq : méthode PL employée pour l'approche réciproque avec des quadrilatères curvilignes à interpolation quadratique placés aux sites d'injection et d'extraction de courant.

LISTE DES ANNEXES

A.1 : DÉFLATION MATRICIELLE.....	99
A.2 : CALCUL DES ÉLÉMENTS MATRICIELLES POUR LE POTENTIEL LINÉAIRE.....	101
A.3 : QUADRATURE DE GAUSS.....	105
A.4 : RÉOLUTION D'INTÉGRALES SINGULIÈRES.....	117
A.5 : POTENTIEL ANALYTIQUE SUR TROIS SPHÈRES CONCENTRIQUES...	128

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Électroencéphalographie

Les courants électriques générés par les neurones produisent des champs de potentiel à l'intérieur et à la surface du volume - appelé volume conducteur - formé par la tête humaine. Une combinaison particulière de sources neurales à l'intérieur du cerveau génère, à chaque instant, une distribution unique de potentiels qui peut être mesurée à la surface du cuir chevelu. La nature des sources neurales ainsi que les propriétés électriques du volume conducteur déterminent la distribution du champ de potentiel résultant. Les méthodes de localisation des sources neurales dépendent alors des modèles de la géométrie et des propriétés électriques de la tête, autant que des modèles des sources responsables des champs de potentiels enregistrés sur le cuir chevelu.

L'électroencéphalogramme (EEG) est un enregistrement des potentiels dus à l'activité électrique du cerveau, fait à l'aide d'un certain nombre d'électrodes placées sur le cuir chevelu (voir figure 1.1). Des changements dans la polarisation de membrane de neurones provoquent des courants ioniques qui, à leur tour, produisent ces potentiels électriques. Plutôt que les potentiels d'action qui sont trop rapides (environ 1-2 ms), ce sont généralement les potentiels gradués postsynaptiques excitateurs et inhibiteurs d'une durée de 10 à 200 ms qui contribuent le plus aux courants qui circulent dans la tête.

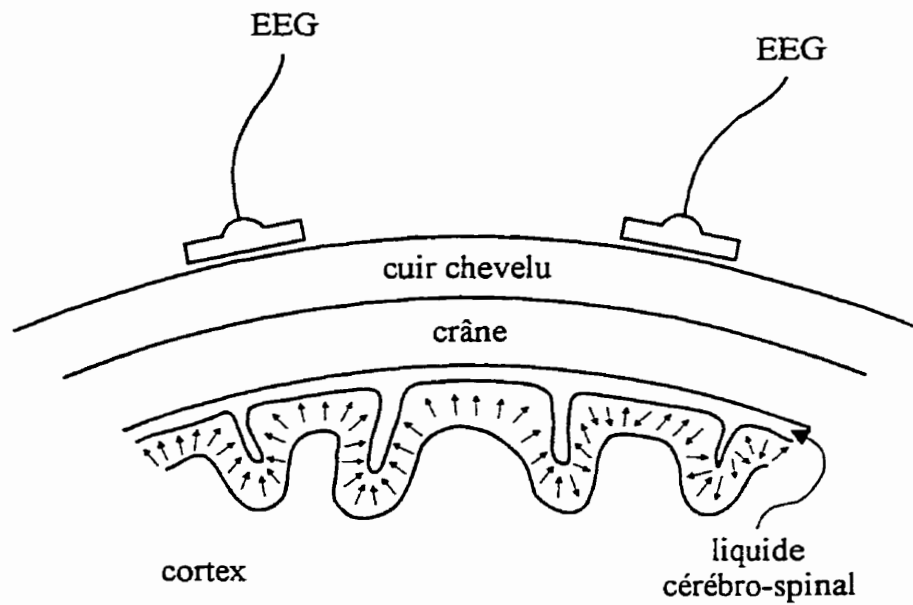


Figure 1.1. Représentation schématique d'une section de la tête humaine, montrant le cortex, le liquide cérébro-spinal, le crâne et le cuir chevelu. Les électrodes de mesure pour électroencéphalogramme (EEG) sont placées sur le cuir chevelu. Une couche du cortex supérieur est illustrée, les vecteurs indiquant l'orientation des sources neuronales, soit les dipôles équivalents.

Ainsi, en réponse à une stimulation, des groupes de neurones avec beaucoup d'interconnexions génèrent des potentiels gradués et donnent lieu à des courants ioniques. Ces courants produisent à leur tour des gradients de potentiel dans et sur la tête qui sont directement reliés à l'activation sous-jacente du groupe de neurones.

Encore plus d'information peut être tirée de l'EEG à propos de chaque groupe de neurones. L'activité synaptique d'un neurone peut se combiner et former une source résultante, soit un dipôle de courant (voir figure 1.2). En effet, il est généralement admis que les potentiels de surface sont générés par des couches dipolaires représentant l'activité des neurones corticaux synchronisés qui s'étendent sur de grandes parties de la surface corticale (une zone d'activation est typiquement inférieure à dix centimètres) (Nunez, 1990). De plus, quand les sources se trouvent dans le cortex supérieur, comme peut être le cas pour l'épilepsie focale, on sait que ces sources sont orientées perpendiculairement à la surface du cortex. Donc, elles peuvent être orientées tangentielllement si elles se trouvent dans les fissures du cortex, ou radialement si elles se trouvent sur la surface externe du cortex (voir figure 1.1).

1.2 Localisation de sites épileptiques

La localisation non invasive d'un site épileptique à partir de son activité électrique illustre l'importance clinique de l'électroencéphalographie, car ce site est impossible à

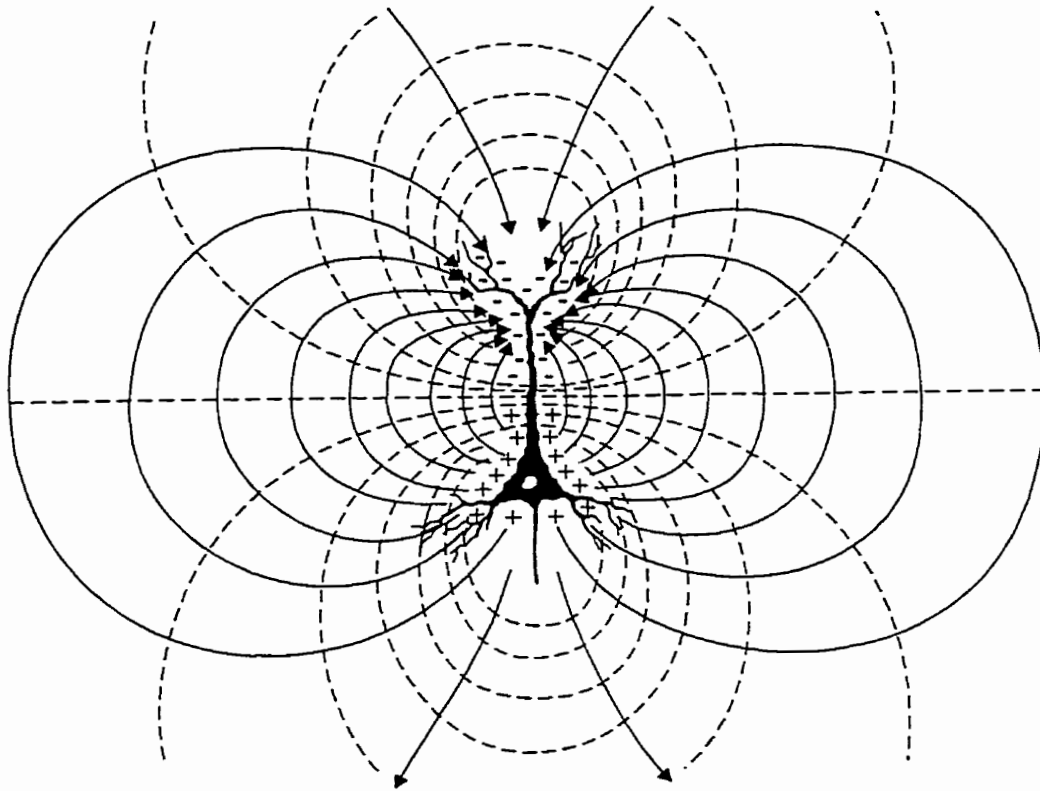


Figure 1.2. Un dipôle équivalent. Les lignes pleines représentent le champ de courant, tandis que les lignes en pointillés représentent le champ de potentiel.

identifier en utilisant des techniques d'imagerie comme la résonance magnétique (MRI) ou la tomographie (CT), et les techniques invasives sont généralement impossibles au niveau du cerveau humain (pour les cas graves on doit utiliser la chirurgie exploratrice). Les techniques d'imagerie fonctionnelle par résonance magnétique (fMRI) ou la tomographie par émission de positrons (PET) sont peu utiles dans un cas comme celui de l'épilepsie focale où les processus sont très rapides et variables, car ces techniques intègrent l'activité neurale sur un intervalle de temps non négligeable. Des techniques non invasives de mesure comme l'enregistrement de l'électroencéphalogramme (EEG) ou du magnétoencéphalogramme (MEG) ont une résolution temporelle bien meilleure qui n'est limitée que par le temps nécessaire à ce que les processus biologiques produisent les potentiels ou les champs magnétiques mesurés. Comme on l'a déjà mentionné, l'épilepsie focale est un phénomène rapide et en grande partie imprévisible. Les mesures en parallèle, essentielles pour observer ce type de phénomène, nécessitent un équipement particulièrement élaboré et coûteux dans le cas du MEG.

Pour beaucoup de patients atteints d'épilepsie, l'EEG est épileptiforme dans la période entre les crises, montrant des pics intermittents de haute amplitude avec ou sans ondes lentes associées (voir figure 1.3). Les pics sont particulièrement intéressants pour la localisation de lésions épileptiformes, ce qui est important si une intervention chirurgicale est envisageable. Dans le cas de l'épilepsie focale, par sa définition même, il y a une seule lésion épileptiforme de petite taille et donc, pour ces petites régions d'activation, le dipôle équivalent est une bonne approximation.

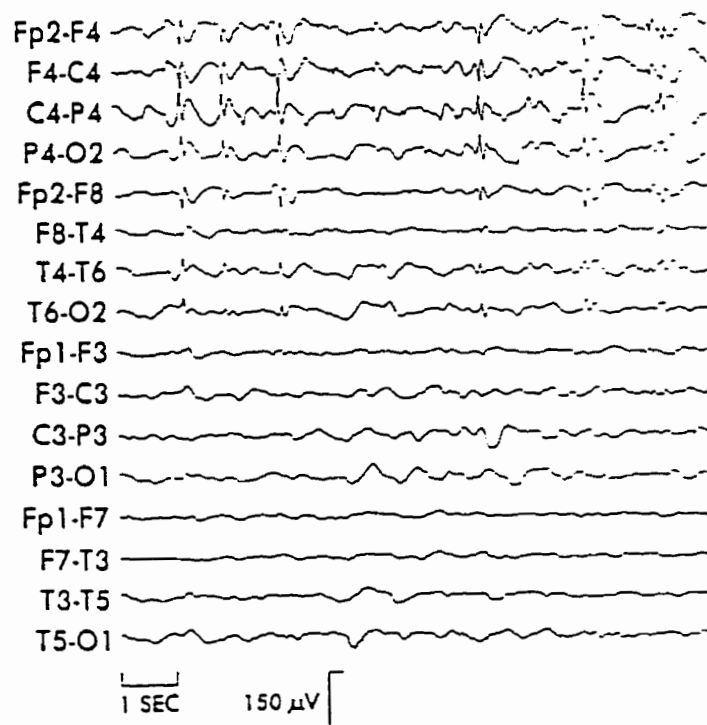
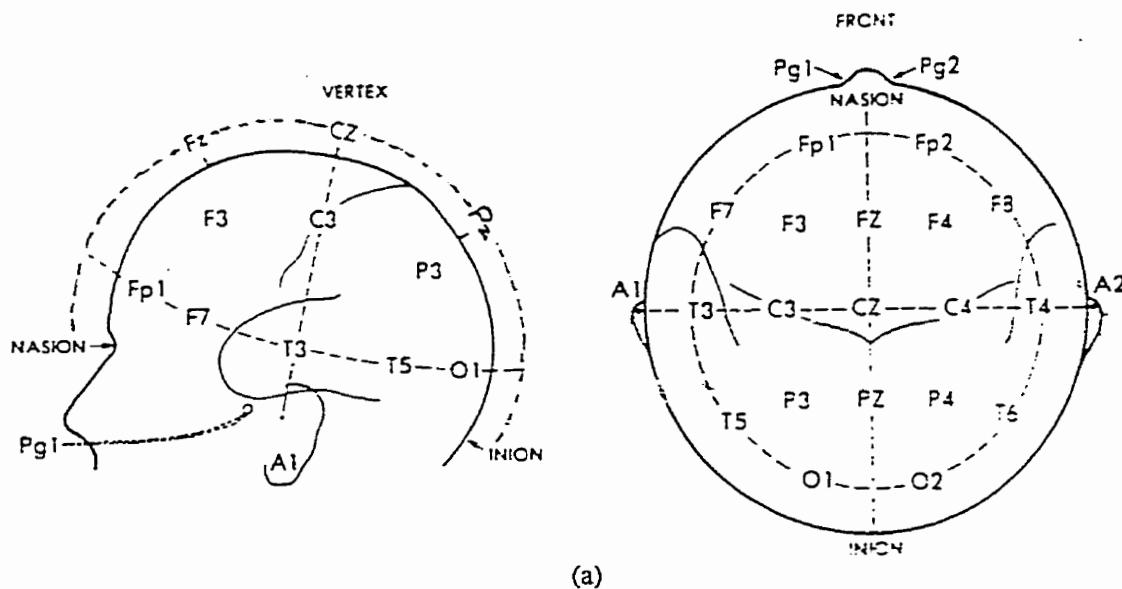


Figure 1.3. L'épilepsie focale : (a) représentation schématique du système 10-20 pour le placement d'électrodes en électroencéphalographie (EEG) et (b) EEG chez un sujet épileptique montrant des piques focaux dans la région centrale de droite. D'après Gevins et Aminoff [1988].

Néanmoins, l'électroencéphalogramme a des limitations importantes qui ne nous permettent pas de déduire directement de façon non ambiguë l'emplacement et l'orientation du dipôle sous-jacent aux potentiels mesurés, même si notre hypothèse que le groupe de neurones en question peut être représenté par un dipôle de courant est valide. Ceci est surtout dû à l'effet d'étalement des différentes structures de la tête (en particulier, le crâne de conductivité relativement faible) sur la distribution de potentiels de surface. Des précisions sur l'activité cérébrale doivent être déduites de l'enregistrement à partir de connaissances sur la physiologie et l'anatomie de la tête. Cette réduction s'appelle le problème inverse et concerne la localisation des sources dans le cerveau responsables des potentiels mesurables sur le cuir chevelu. En pratique, le problème inverse dépend étroitement d'une résolution préalable et précise du problème direct, c'est-à-dire le calcul même des potentiels de surface générés par des sources neurales situées dans le cerveau. Ce mémoire traite deux méthodes bien distinctes de résoudre le problème direct en électroencéphalographie : la méthode conventionnelle et la méthode réciproque, employant toutes les deux la méthode des éléments de frontières. Les précisions relatives de ces méthodes, ainsi que leurs avantages et inconvénients, seront comparés dans le cadre de la résolution éventuelle du problème inverse.

1.3 Équations fondamentales

Des études sur les propriétés électriques du corps humain montrent que celles-ci sont linéaires, que les effets capacitifs, inductifs et de propagation sont négligeables (Plonsey, 1969). La tête humaine peut alors être considérée comme un milieu essentiellement résistif, ce qui confère une nature quasi statique au champ de potentiels, c'est-à-dire que ceux-ci varient dans le temps, mais que la distribution de potentiels instantanée peut être décrite par les équations électrostatiques qui n'impliquent que la valeur instantanée du courant de la source. Dans ces conditions, le champ électrique \vec{E} peut s'exprimer comme le gradient du potentiel Φ ,

$$\vec{E} = -\nabla\Phi. \quad (1.1)$$

De plus, pour un milieu homogène et isotrope de conductivité σ , la densité de courant (le courant qui traverse une aire de surface unitaire) peut être représentée par

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}_{source}, \quad (1.2)$$

où \vec{J}_{source} est la densité de courant de source dans ce volume conducteur, dans notre cas, le cerveau. Notons que le cerveau est réellement anisotrope (les neurones sont orientés perpendiculairement à la surface du cortex et donc la conductivité est plus grande dans cette direction), mais l'information sur la conductivité locale dans le cerveau n'est pas disponible tout simplement.

Dans cette situation quasi statique, la divergence $\nabla \cdot \vec{J}$ est nulle et on retrouve l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \Phi = (\nabla \cdot \vec{J}_{source}) / \sigma. \quad (1.3)$$

Pour des régions qui ne contiennent pas de source de courant, telles que le crâne et le cuir chevelu, le terme \vec{J}_{source} de l'équation (1.2) est nul et l'équation (1.3) décrivant le champ de potentiel se réduit à l'équation bien connue de Laplace (Plonsey, 1969),

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.4)$$

Finalement, comme l'interface cuir chevelu-air ne permet pas le passage du courant, la condition de frontière suivante s'applique (la condition de frontière Neumann homogène)

$$\nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.5)$$

où \vec{n} définit le vecteur unitaire à l'interface cuir chevelu-air pointant vers l'extérieur.

1.4 Méthode conventionnelle pour la résolution du problème direct

Dans la mesure où les sources de courant du cerveau peuvent être exprimées comme des dipôles équivalents (voir section 1.1), le problème direct en électroencéphalographie se réduit au calcul des potentiels de surface dus à des dipôles de courant dans un volume conducteur en forme de tête humaine. Étant donné que le potentiel généré sur une surface dépend de la géométrie et conductivité du conducteur, il est important d'incorporer une forme et des informations géométriques réalistes dans la formulation du problème. Le cerveau, le crâne, et le cuir chevelu humain dont il est question dans ce travail ont une géométrie irrégulière. Puisque des solutions analytiques

pour les potentiels de surface ne sont disponibles que pour des surfaces simples comme la sphère, l'utilisation de volumes réalistes nécessite des techniques numériques pour résoudre le problème direct. La méthode numérique qui a été utilisée dans le présent travail, à savoir la méthode des éléments de frontières (BEM), permet le calcul des potentiels de surface générés par des sources de courants à l'intérieur d'un volume conducteur, en calculant les effets de la source aux frontières du volume conducteur. Les frontières sont les interfaces entre les régions isotropes de conductivités différentes dans le volume conducteur et la surface externe de ce volume. En utilisant de l'information sur la géométrie et conductivité du crâne et des structures du cerveau, il est possible de modéliser la tête humaine de cette manière. Les régions le plus souvent considérées sont le cuir chevelu, le crâne, le cerveau, et, parfois, les compartiments contenant le liquide cérebro-spinal.

La résolution du problème direct en EEG consiste donc à résoudre l'équation de Poisson, soumise à la condition de frontière de l'équation (1.5), pour la distribution de potentiel sur la surface externe du cuir chevelu, connaissant la source de courant dans un certain volume conducteur qui représente la tête. On accomplit ceci en transformant l'équation de Poisson, qui décrit le comportement du potentiel à l'intérieur et aux frontières du volume conducteur, en une équation intégrale applicable uniquement aux frontières qui doit être résolue numériquement. Notons que la théorie générale présentée dans ce travail pour la BEM est basée sur Barr et al. (1966) et Barnard et al. (1967), et que l'approche utilisée pour l'application spécifique de cette méthode au problème qui

nous intéresse, c'est-à-dire la résolution du problème direct en électroencéphalographie pour un modèle réaliste de la tête, est inspirée des travaux de Meijs et al. (1989), Heller (1990), de Munck (1992) et Schlitt et al. (1995).

1.5 Méthode réciproque pour la résolution du problème direct

Cette approche est basée sur le théorème de réciprocité de Helmholtz. Ce théorème a été utilisé pour caractériser la sensibilité d'électrodes par Rush et Driscoll (1969), et appliqué à la résolution du problème direct en électroencéphalographie pour un modèle réaliste de la tête par Fletcher et al. (1995). En effet, la connaissance de la densité de courant (ou champ électrique) à travers un volume conducteur due à une injection de courant entre deux électrodes stimulantes détermine complètement comment ces mêmes électrodes, quand elles sont utilisées comme électrodes d'enregistrement pour l'EEG, mesurent les potentiels dus aux sources dipolaires n'importe où dans le volume conducteur. Autrement dit, par réciprocité, la différence de potentiel V_i mesurée entre une paire d'électrodes i placées sur le cuir chevelu est obtenue en utilisant ces mêmes électrodes pour injecter et retirer un courant I , respectivement, et en calculant le champ électrique \vec{E} à l'emplacement du dipôle. Le théorème de réciprocité peut se traduire, mathématiquement, par la relation

$$V_i = -\vec{p} \cdot \frac{\vec{E}}{|I|}, \quad (1.6)$$

où \vec{p} est le vecteur du moment dipolaire du dipôle source (voir figure 1.4).

Notons que, dans ce cas, on suppose qu'il n'y a aucune source de courant dans tout le volume conducteur et que l'équation de Laplace (1.4) est valide dans toutes les régions du modèle de la tête. L'équation (1.2) devient simplement la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}.$$

Il est évident que si l'on double le courant injecté I , la densité de courant \vec{J} sera doublée partout (par linéarité). En d'autres termes, le champ électrique normalisé par le courant injecté, $\vec{E}/|I|$, ne dépendant que des propriétés géométriques et électriques du volume conducteur et du placement d'électrodes. Ce champ vectoriel normalisé ('lead field') caractérise un genre d'accès électrique d'une paire d'électrodes à n'importe quel point du volume conducteur. Le théorème de réciprocité nous dit simplement que cet accès s'applique aussi au problème réciproque, quand les électrodes sont utilisé pour enregistrer des potentiels plutôt que d'injecter des courants. C'est ainsi une façon différente de déterminer les potentiels de surface et donc de résoudre le problème direct.

L'application du théorème de réciprocité au problème du volume conducteur en forme de tête a l'effet de décaler les emplacements des sources du volume cérébral aux emplacements des électrodes sur le cuir chevelu. Il s'agit maintenant de calculer les champs électriques à un emplacement de source donné dans le volume cérébral dus à chaque paire d'électrodes, plutôt que de calculer les potentiels de surface aux électrodes

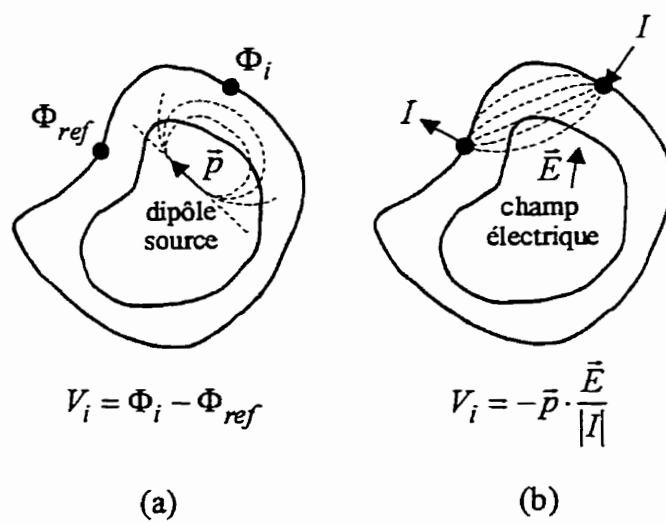


Figure 1.4. Deux techniques de calcul de la différence de potentiel V_i entre une paire d'électrodes i pour (a) la méthode conventionnelle et (b) la méthode réciproque. Les lignes en pointillés représentent schématiquement le champ de courant dans chaque cas.

d'enregistrement. Ceci est un problème fondamentalement différent, mais qui peut quand même être résolu en utilisant la BEM. Les conditions de frontières sont toujours les conditions de Neumann, mais, maintenant, le flux sur la surface externe normale à la surface est non nul aux sites des électrodes, et donc l'équation (1.5) n'est plus valide à ces derniers.

CHAPITRE 2 MÉTHODE CONVENTIONNELLE POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT

2.1 Dérivation des équations

On considère les surfaces S_s ($s = 1, 2, \dots, M$), fermées et non sécantes, séparant les régions homogènes V_s ($s = 1, 2, \dots, M$) distinctes de conductivité isotrope σ_s . Soit S_1 la surface externe du volume conducteur contenant les autres surfaces S_2, S_3, \dots, S_M , qui peuvent être contenues les unes dans les autres (voir figure 2.1). Le volume conducteur est entouré d'air de conductance nulle. La formulation de la BEM en termes d'équations intégrales pour le potentiel repose sur le théorème de divergence, appliqué à chaque volume V_s du volume conducteur. Soit V_r un volume quelconque de conductivité σ_r du volume conducteur, on a alors l'équation

$$\int_{V_r} \nabla \cdot (\varphi \sigma_r \nabla \phi) dV = \sum_{\forall S_s(V_r)} \int_{S_s} (\varphi \sigma_r \nabla \phi) \cdot d\vec{S}, \quad (2.1)$$

où φ et ϕ sont des fonctions scalaires de position et $\forall S_s(V_r)$ dénote que la somme est prise sur toutes les surfaces S_s qui délimitent le volume V_r . Notons que $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, où \vec{n} est la normale à la surface S_s vers l'extérieur du volume V_r . En échangeant φ et ϕ ,

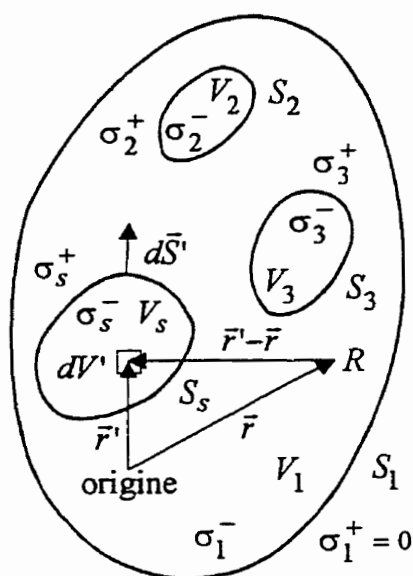


Figure 2.1. Diagramme qui illustre la dérivation de l'équation intégrale pour le potentiel dans le cas de surfaces multiples. Le théorème de Green est appliqué aux régions V_s de conductivité homogène et isotrope, limitée par les surfaces fermées S_s . En particulier, notons que S_1 renferme toutes les autres surfaces et que le nombre de surfaces est égale au nombre de volumes. R est un point arbitraire du volume conducteur caractérisé par le vecteur position \vec{r} , et \vec{r}' est le vecteur à l'élément variable d'intégration de volume dV' et l'élément variable d'intégration de surface dS' . Notons que $\sigma_1^+ = 0$.

on trouve une équation semblable à l'équation (2.1) qui peut être soustraite de cette dernière. On obtient alors la seconde identité de Green :

$$\int_{V_r} [\sigma_r (\phi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi)] dV = \sum_{\forall S_s(V_r)} \int_{S_s} [\sigma_r (\phi \nabla \phi - \phi \nabla \phi)] \cdot d\vec{S}. \quad (2.2)$$

En considérant les surfaces comme interfaces entre régions de conductivités différentes (voir figure 2.1), la somme de chaque côté de l'équation (2.2) pour tous les volumes V_s du volume conducteur nous donne (Smythe, 1968)

$$\sum_{s=1}^M \int_{V_s} [\sigma_s^- (\phi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi)] dV = \sum_{s=1}^M \int_{S_s} [\sigma_s^- (\phi^- \nabla \phi^- - \phi^- \nabla \phi^-) - \sigma_s^+ (\phi^+ \nabla \phi^+ - \phi^+ \nabla \phi^+)] \cdot d\vec{S}, \quad (2.3)$$

où les exposants + et - dénotent que les valeurs sont prises à l'extérieur et à l'intérieur de la surface S_s , respectivement. La notation de l'équation (2.3) est permise si et seulement si $\sigma_1^+ = 0$, car $\sigma_1^+ (\phi^+ \nabla \phi^+ - \phi^+ \nabla \phi^+) = 0$ (la surface externe du volume conducteur n'est pas vraiment considérée). Notons que \vec{n} est toujours la normale positive (c'est-à-dire vers la région de conductivité σ_s^+) à la surface S_s en question.

Soit $\phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, où $|\vec{r} - \vec{r}'|$ représente la distance scalaire entre un point R

(décrit par un vecteur de position fixe \vec{r}) et le volume ou la surface d'intégration (décrit par un vecteur de position variable \vec{r}'). Soit $\phi = \Phi$, où Φ est le potentiel scalaire.

Effectivement, on cherche une expression pour le potentiel au point d'observation R . À travers une interface S_s , à la fois le potentiel et la composante normale du courant (le flux) restent continus, et on a alors, sur chaque surface, les relations suivantes :

$$\Phi^- = \Phi^+$$

et

$$\sigma_s^- \nabla \Phi^- \cdot \vec{n} = \sigma_s^+ \nabla \Phi^+ \cdot \vec{n}.$$

Ainsi, l'équation (2.3) devient

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^M \int_{V_s} \sigma_s^- \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \nabla'^2 \Phi(\vec{r}') dV' - \sum_{s=1}^M \int_{V_s} \sigma_s^- \Phi(\vec{r}') \nabla'^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = \\ - \sum_{s=1}^M \int_{S_s} (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}', \quad (2.4) \end{aligned}$$

où l'opérateur ∇' agit sur les coordonnées primes. Notons que l'étape de sommation de l'équation (2.4) pour tous les volumes V_s est nécessaire pour éliminer les termes représentant le flux de courant.

À partir de l'équation de Poisson (1.3) et sa solution bien connue, on peut reconnaître, dans le premier terme de l'équation ci-dessus, le potentiel dû aux sources de courant \vec{J}_{source} placées dans un milieu homogène et infini de conductivité *unitaire*, soit Φ^∞ . En supposant que les sources sont entièrement et strictement contenues dans un volume V_a (appelé volume actif) dans le volume conducteur et que le point d'observation

R est strictement à l'extérieur de ce volume actif, le premier terme de l'équation (2.4) devient :

$$\int_{V_a} \frac{\nabla' \cdot \bar{J}_{source}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV' = -4\pi\Phi^\infty(\bar{r}).$$

En notant que $\nabla' \cdot \left(\frac{\bar{J}_{source}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \cdot \bar{J}_{source}(\bar{r}') + \frac{\nabla' \cdot \bar{J}_{source}(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|}$ et avec le

théorème de la divergence, on peut réécrire l'équation (2.4) sous la forme

$$\begin{aligned} \int_{V_a} \bar{J}_{source}(\bar{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) dV' + \sum_{s=1}^M \int_{V_s} \sigma_s^- \Phi(\bar{r}') \nabla'^2 \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) dV' = \\ + \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \int_{S_s} \Phi(\bar{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \cdot d\bar{S}', \quad (2.5) \end{aligned}$$

où, dans notre cas, \bar{J}_{source} identifie explicitement le moment du dipôle de courant par unité volumique.

Il est également possible de montrer (Jackson, 1962) que

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\bar{r} - \bar{r}'),$$

où δ est la fonction delta de Dirac. Le deuxième terme de gauche dans l'équation (2.5) vaut donc $-4\pi\sigma_r^- \Phi(\bar{r})$ pour un point R strictement à l'intérieur de V_r , ($R \in V_r$), où σ_r^- est la conductivité au point R . Mais, dans la BEM, on cherche à calculer les potentiels de surface et, par la suite, on considère que le point d'observation R est

infiniment près de la surface S_r dans le volume V_r . On peut alors réécrire l'équation (2.5),

$$4\pi\sigma_r^-\Phi(\vec{r}) = 4\pi\Phi^\infty(\vec{r}) - \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \int_{S_s} \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}'. \quad (2.6)$$

En plus, pour un point d'observation R près d'une surface S_s , une singularité du type valeur principale de Cauchy apparaît dans l'intégrale de surface à droite dans l'équation (2.6) quand \vec{r}' s'approche de \vec{r} . On divise l'intégrale en deux parties,

$$4\pi\sigma_r^-\Phi(\vec{r}) = 4\pi\Phi^\infty(\vec{r}) - \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \int_{S_s/\exists(\vec{r})} \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' - (\sigma_r^- - \sigma_r^+) \Phi(\vec{r}) \lim_{\hat{E}(\vec{r}) \rightarrow \{\vec{r}\}} \left\{ \int_{\hat{E}(\vec{r})} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' \right\},$$

où le symbole $S_s/\exists(\vec{r})$ dénote que l'intégrale est prise sur chaque surface S_s , mais que pour $S_s = S_r$ un environnement ou voisinage $\hat{E}(\vec{r})$ du point d'observation R (décrit par le vecteur \vec{r}) est exclu. Notons que l'angle solide soutenu par la surface S_s au point R est égal à $-\int_{S_s} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}'$. L'angle solide soutenu par $\hat{E}(\vec{r})$ au point R quand

$\hat{E}(\vec{r})$ tend vers $\{\vec{r}\}$ correspond alors à $-\lim_{\hat{E}(\vec{r}) \rightarrow \{\vec{r}\}} \left\{ \int_{\hat{E}(\vec{r})} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' \right\}$, soit

$\Omega^-(\hat{E}(\bar{r});\bar{r})$ où l'indice $-$ dénote que le point R est pris à l'intérieur de la surface en question. On sait que, pour un point à l'intérieur d'une surface fermée, l'angle solide total soutenu par cette surface à ce point est 4π . Soit $\Omega^-(S_r;\bar{r})$ l'angle solide soutenu par la surface S_r (où l'environnement $\hat{E}(\bar{r})$ de R est exclu) vue du point R juste à l'intérieur de cette surface. Alors $\Omega^-(S_r;\bar{r}) + \Omega^-(\hat{E}(\bar{r});\bar{r}) = 4\pi$ et on peut réécrire l'équation ci-dessus sous la forme :

$$(\sigma_r^- \Omega^-(S_r;\bar{r}) + \sigma_r^+ \Omega^-(\hat{E}(\bar{r});\bar{r}))\Phi(\bar{r}) = 4\pi\Phi^\infty(\bar{r}) - \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \int_{S_s/\exists(\bar{r})} \Phi(\bar{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \cdot d\bar{S}'. \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) est l'équation intégrale de Fredholm du second type pour le potentiel de surface dans le cas de plusieurs régions homogènes de conductivités isotropes. Le potentiel à n'importe quel point d'une surface S_r peut alors être considéré comme la somme du terme source, $4\pi\Phi^\infty(\bar{r})$, proportionnel au potentiel dû aux sources de courant \vec{J}_{source} placées dans un milieu homogène et infini de conductivité unitaire, et de l'effet du courant volumique décrit par le dernier terme à droite de l'équation (2.7). L'existence d'une solution de cette équation continue est assurée par l'existence d'une solution réelle, physique, mais cette solution n'est pas unique (voir section 2.2).

L'utilisation de la méthode des éléments de frontière nécessite la division des surfaces délimitant le domaine d'intérêt en un certain nombre d'éléments de surface. Chaque intégrale de l'équation (2.7) qui gouverne les potentiels de surface peut être

estimée par une somme d'intégrales de surface sur l'ensemble des éléments. À chacun de ces éléments est généralement associée une fonction d'interpolation d'ordre zéro, un, ou plus, décrivant sur celui-ci le comportement du paramètre étudié, à savoir le potentiel. On peut alors supposer que le potentiel sur un élément est une fonction d'un certain nombre d'inconnues, notamment les potentiels à certains points discrets qui peuvent, ou non, être spécifiques à l'élément. Par exemple, le potentiel sur un élément peut être supposé constant (la valeur du potentiel constant devient l'inconnue, souvent associée à un point discret spécifique à l'élément tel que son centroïde) ou une fonction linéaire qui atteint une valeur différente à chaque sommet (les potentiels des sommets deviennent les inconnues, mais dans ce cas chaque inconnue est partagée par tous les éléments qui touchent le sommet auquel elle est associée). Les intégrales de surface (l'équation (2.7) avec les différents points discrets comme points d'observation) se réduisent alors à un système d'équations algébriques, dont la solution (avec les fonctions d'interpolation) détermine le potentiel sur chaque élément et donc partout sur les surfaces.

Il y a trois facteurs facilement identifiables qui limitent la précision et qui affectent le temps nécessaire à obtenir une solution avec la BEM : le choix d'une fonction d'interpolation, la forme de chaque élément de surface (par exemple, triangles ou quadrilatères), et la densité d'éléments (Ferguson et Stroh, 1997). Le choix d'une fonction d'interpolation du potentiel est souvent limité à des fonctions constantes ou linéaires sur des éléments triangulaires, normalement plans à cause de la simplicité de la formulation mathématique du problème qui en résulte. Effectivement, l'intégrale sur

plusieurs types d'éléments peut être estimée numériquement en utilisant l'intégration par points (Brebbia et Dominguez, 1989), mais une expression analytique pour ces intégrales a été développée pour des triangles plans avec des fonctions d'interpolations constantes ou linéaires (il existe aussi une expression analytique pour des triangles plans avec une fonction d'interpolation quadratique (de Munck, 1992)). Dans ce cadre, il n'est pas clair à quel point la forme des triangles plans (par exemple, triangles équilatéraux ou allongés) affecte la solution. Le nombre d'éléments limite la fidélité de notre surface discrète à la surface qui nous intéresse. Un plus grand nombre d'éléments améliore la précision de la solution - pour une fonction d'interpolation et un type d'éléments donnés - au prix d'un temps de calcul plus long à cause de l'augmentation du nombre d'inconnues (Schlitt et al., 1995). On sait qu'en général pour une surface discrète donnée, il y a deux fois plus d'inconnues pour l'approche du potentiel constant (les centroïdes des triangles) que pour l'approche du potentiel linéaire (les sommets des triangles). Mais, même si, dans cette situation, l'approche du potentiel constant prend plus de temps que l'approche du potentiel linéaire, il n'est pas évident qu'on gagne vraiment en terme de précision des résultats.

2.2 Discrétisation des équations

Soit

$$S_s = \bigcup_{l=1}^{N_s^\Delta} \Delta_l^{(s)},$$

la décomposition de la surface S_s en N_s^Δ éléments $\Delta_l^{(s)}$ qui ne se coupent que suivant leurs frontières communes. On suppose que les surfaces S_s ont certaines propriétés qui sont une combinaison de celles d'une surface de Lyapunov et celles d'une surface qui est régulière dans le sens de Kellogg (Lynn et Timlake, 1966). L'équation (2.7) devient donc

$$(\sigma_r^- \Omega^-(S_r; \vec{r}) + \sigma_r^+ \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r})) \Phi(\vec{r}) =$$

$$4\pi\Phi^\infty(\vec{r}) - \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} / \exists(\vec{r})} \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}', \quad (2.8)$$

et le terme source, $4\pi\Phi^\infty(\vec{r})$, est tel que l'existence d'une solution de l'équation (2.8) est assurée par le théorème étendu de l'alternative de Fredholm (Kellogg, 1929). À ce moment-là, l'équation (2.8) peut être résolue de façon approchée en choisissant un ensemble de fonctions $\{h_n(\vec{r})\}_{n=1}^N$ et un ensemble de points discrets sur les surfaces S_s ($s = 1, 2, \dots, M$) décrits par les vecteurs de position $\{\vec{r}_m\}_{m=1}^N$, tels que :

$$h_n(\vec{r}_m) = \delta_{nm}. \quad (2.9)$$

Ainsi, alors qu'une solution exacte pour le potentiel est généralement impossible à obtenir, on peut estimer cette solution avec l'expansion

$$\hat{\Phi}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \Phi_n h_n(\vec{r}), \quad (2.10)$$

où les coefficients Φ_i représentent les inconnues, des potentiels dont on détermine les valeurs en contraignant $\hat{\Phi}(\vec{r})$ à satisfaire l'équation (2.8) aux points discrets caractérisés par \vec{r}_i . Pour un point $R \in S_r$ caractérisé par le vecteur $\vec{r} = \vec{r}_m$, nous obtenons

$$(\sigma_r^- \Omega^-(S_r; \vec{r}_m) + \sigma_r^+ \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}_m); \vec{r}_m)) \hat{\Phi}(\vec{r}_m) = 4\pi \Phi^\infty(\vec{r}_m) - \sum_{n=1}^N \Phi_n \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} / \exists(\vec{r}_m)} h_n(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}', \quad (2.11)$$

où, d'après les équations (2.9) et (2.10), $\hat{\Phi}(\vec{r}_m) = \Phi_m$. En variant \vec{r}_m sur l'ensemble $\{\vec{r}_m\}_{m=1}^N$ décrivant les N points discrets, l'équation (2.11) se réduit à l'ensemble de N équations linéaires suivant

$$A\Phi = G, \quad (2.12)$$

où Φ est le vecteur colonne des potentiels de surface et G est le vecteur colonne des termes sources ($g_m = 4\pi \Phi^\infty(\vec{r}_m)$). Les coefficients de la matrice A sont donnés par :

$$a_{mn} = \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} / \exists(\vec{r}_m)} h_n(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' + \delta_{nm} (\sigma_r^- \Omega^-(S_r; \vec{r}_m) + \sigma_r^+ \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}_m); \vec{r}_m)). \quad (2.13)$$

On sait que, physiquement, le potentiel en un point est toujours pris par rapport à une référence. Ceci est reflété dans notre formulation du problème (l'équation (2.7)) qui repose sur la condition de frontière Neumann et ne nous permet donc de calculer le

potentiel qu'à une constante près. Le problème est mal posé et, pour préserver cette nature non unique dans nos équations discrètes, on doit s'assurer que la matrice A de l'équation (2.12) est singulière. Ceci est accompli en imposant la condition purement mathématique suivante

$$\sum_{n=1}^N h_n(\bar{r}) = 1, \quad (2.14)$$

où \bar{r} décrit un point d'une des surface S_s , ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_{mn} = \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} / \Xi(\bar{r}_m)} \nabla' \left(\frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}'|} \right) \cdot d\bar{S}' \\ + (\sigma_r^- \Omega^-(S_r; \bar{r}_m) + \sigma_r^+ \Omega^-(\hat{E}(\bar{r}_m); \bar{r}_m)) = 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

en notant que la somme $\sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} / \Xi(\bar{r}_m)} \nabla' \left(\frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}'|} \right) \cdot d\bar{S}'$ ci-dessus est égale à

$-\Omega^-(S_r; \bar{r}_m)$ pour $S_s = S_r$, -4π pour $S_r \subset S_s$, et zéro sinon. Notons aussi que

$\sigma_1^+ = 0$ et que $\sigma_s^+ = \sigma_{s'}^-$ pour une surface S_s incluse dans une surface $S_{s'}$ quand

aucune autre les séparent. Le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ de longueur N est donc un vecteur

propre de A de valeur propre zéro et la matrice est alors singulière. Cependant, la

résolution de l'équation (2.12) nécessite l'inversion de la matrice A . Une approche

consiste à fixer le potentiel d'un point arbitraire, ce qui est équivalent à choisir une

référence nulle pour le potentiel. La technique de la déflation (Lynn et Timlake, 1966),

également équivalente au choix d'une référence pour le potentiel, permet aussi l'inversion de la matrice si l'égalité (l'équation (2.15)) est exacte (voir annexe A.1).

2.2.1 Méthode du potentiel constant aux centroïdes de triangles plans

Le choix le plus simple pour la fonction $h_n(\vec{r})$ est obtenu en divisant les surfaces en triangles, et en prenant $h_n(\vec{r})$ égale à 1 sur le triangle n et zéro ailleurs. Les points de discrétisation deviennent les centroïdes des triangles, et le nombre de points discrets est égal au nombre d'éléments de surface, soit $N_s = N_s^\Delta$, où N_s est le nombre de points discrets sur la surface S_s . On déduit alors de l'équation (2.13), l'expression des coefficients non diagonaux de la matrice A (les coefficients diagonaux seront traités plus loin)

$$a_{mn} = -(\sigma_s^- - \sigma_s^+) \Omega(\Delta_n; \vec{r}_m), \quad (m \neq n) \quad (2.16)$$

où $\Delta_n = \Delta_l^{(s)}$ avec $l = n - N_{s-1} - \dots - N_1$, et

$$\Omega(\Delta_n; \vec{r}_m) = - \int_{\Delta_n} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' \quad (2.17)$$

est l'angle solide total soutenu par le triangle Δ_n au point m . Gelernter et Swihart (1964) ont calculé cet angle solide par la règle du centroïde,

$$\Omega(\Delta_n; \vec{r}_m) = \mu_n \frac{\vec{c} \cdot \vec{n}}{c^3},$$

où \vec{c} est le vecteur du centroïde du triangle m au centroïde du triangle n , μ_n est l'aire du triangle n , et \vec{n} est la normale unitaire de Δ_n . Notons que $\Omega(\Delta_n; \vec{r}_m)$ n'est pas définie pour $m = n$, c'est-à-dire quand les deux triangles sont identiques. La précision de la solution obtenue à partir de l'équation (2.12) est déterminée en grande partie par la manière spécifique dont les intégrales sont calculées pour générer la matrice A . L'équation ci-dessus est une mauvaise approximation de l'angle solide pour les triangles adjacents au triangle m , quand le point d'observation est près du triangle en question. Une formulation plus précise a été présentée par Barnard et al. (1967), appelée la règle d'un angle solide ('one solid angle'). Soit \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , et \vec{r}_3 les vecteurs issus du centroïde de Δ_m et pointant vers les sommets de Δ_n , on a alors

$$\Omega(\Delta_n; \vec{r}_m) = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \frac{\vec{c} \cdot \vec{n}}{|\vec{c} \cdot \vec{n}|},$$

où α est défini par

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{|(\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) \times (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)|}{-(\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)} \right),$$

et β et γ sont définis d'une façon semblable avec une permutation cyclique des indices (1, 2, 3). La complexité de l'expression ci-dessus pour l'angle solide et le grand nombre d'étapes de calcul la rend plutôt sensible aux erreurs numériques. Une expression équivalente pour l'angle solide qui réduit davantage le nombre d'opérations est donnée par van Oosterom et Strackee (1983),

$$\Omega(\Delta_n; \bar{r}_m) = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\bar{r}_1 \cdot (\bar{r}_2 \times \bar{r}_3)}{|\bar{r}_1| |\bar{r}_2| |\bar{r}_3| + |\bar{r}_3| (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) + |\bar{r}_2| (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_3) + |\bar{r}_1| (\bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3)} \right) \frac{\bar{c} \cdot \bar{n}}{|\bar{c} \cdot \bar{n}|}. \quad (2.18)$$

Notons qu'encore une fois $\Omega(\Delta_n; \bar{r}_m)$ n'est pas définie pour $m = n$.

Une autre alternative est d'intégrer les deux côtés de l'équation (2.8) sur la surface du triangle Δ_m . En divisant le résultat par l'aire de cet élément (Lynn et Timlake, 1968), le potentiel Φ_m assigné au triangle Δ_m est supposé être égal à

$$\Phi_m = \frac{1}{\mu_m} \int_{\Delta_m} \Phi(\bar{r}') dS',$$

où μ_m est l'aire du triangle Δ_m . Ceci revient à évaluer l'angle solide de l'équation (2.17) en plusieurs points du triangle Δ_m et à en prendre la moyenne (Barnard et al., 1967). Notons qu'avec cette méthode, le potentiel dans un milieu infini de l'équation (2.8) - calculé normalement en chaque point d'observation - est maintenant aussi une moyenne sur μ_m (Purcell et al., 1988). Mais, en général, les résultats générés par cette méthode sont pratiquement identiques (Ferguson et Stroink, 1997) à ceux de la méthode sans ce moyennage. Par la suite, on utilisera la méthode sans moyennage, la plus étudiée, avec l'expression (2.18) pour l'angle solide, la plus précise.

Barr et al. (1977) ont indiqué que choisir le potentiel en chaque sommet de chaque triangle comme inconnue plutôt que le potentiel sur chaque triangle serait avantageux numériquement. Comme il a été mentionné dans la section 2.1, le nombre total de sommets de triangles sur une surface est à peu près la moitié du nombre total de triangles. Dans la situation expérimentale où les potentiels sont mesurés sur la surface du

cuir chevelu avec des électrodes, ce sont les positions de ces électrodes qui sont utilisées en triangularisant la surface en question. L'approche des sommets a alors l'avantage supplémentaire de donner les potentiels de surface et les coordonnées de surface aux mêmes emplacements.

2.2.2 Méthode du potentiel linéaire aux sommets de triangles plans

La méthode la plus simple utilisant les sommets plutôt que les centroïdes consiste à attribuer un tiers de l'angle solide total soutenu par un triangle à chaque sommet de ce triangle (Barr et al., 1977). Notons qu'avec cette méthode, comme avec celle du potentiel constant, la moindre variation du potentiel sur les triangles va introduire une erreur. L'amélioration la plus simple est de supposer que le potentiel varie de façon linéaire sur les triangles, tout en restant continu d'un élément à l'autre. Une tentative (Meijs et al., 1989) consiste à diviser les triangles en plus petits triangles en exprimant les valeurs du potentiel aux nouveaux sommets par rapport au potentiel aux sommets originaux. L'intégrale sur le triangle original devient donc la somme pondérée des trois potentiels, plutôt qu'une simple moyenne comme dans la méthode précédente. Les poids dépendent des quantités relatives de l'angle solide auxquelles contribuent les petits triangles. Ce processus peut être itéré en divisant davantage les petits triangles. Or, ces méthodes sont des approximations tandis que de Munck (1992) a déduit une formule analytique qui décrit la distribution de l'angle solide sur les triangles de façon exacte si le

potentiel varie de façon linéaire sur ces derniers. Dans ce cas, les divisions précédentes ne sont plus nécessaires. En rappelant que les points de discrétisation sont maintenant les sommets des triangles (soient \vec{r}_n , \vec{r}_k , et \vec{r}_l les vecteurs de l'origine aux sommets du triangle Δ_{nkl} , où n, k, l sont ordonnés dans le sens trigonométrique vu d'un point extérieur mais près du triangle) la fonction $h_n(\vec{r})$ pour cette méthode est donnée par

$$\begin{cases} h_n(\vec{r}) = \frac{d(\vec{r}; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}{d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}, & \vec{r} \in \Delta_{nkl} \\ = 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.19)$$

pour chaque triangle Δ_{nkl} qui contient le sommet n caractérisé par le vecteur position \vec{r}_n , où $d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l) \equiv \vec{r}_n \cdot (\vec{r}_k \times \vec{r}_l)$ est le déterminant du triangle Δ_{nkl} . La fonction $h_n(\vec{r})$ atteint la valeur de 1 au sommet n , et s'annule au côté opposé des triangles dont n est un sommet. Les coefficients non diagonaux de la matrice A de l'équation (2.13) sont alors

$$a_{mn} = -(\sigma_s^- - \sigma_s^+) \sum_{\forall \Delta_{n(kl)}} \Omega_n^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m), \quad (m \neq n) \quad (2.20)$$

où $\forall \Delta_{n(kl)}$ dénote que la somme est prise sur tous les triangles Δ_{nkl} incluant le sommet n ($n \in S_s$), et :

$$\Omega_n^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m) = - \int_{\Delta_{nkl}} \frac{d(\vec{r}'; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}{d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l)} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}'. \quad (2.21)$$

Notons que $\Omega_n^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m)$ n'est pas un angle solide à proprement parler mais une fonction de l'angle solide total soutenu par le triangle Δ_{nkl} , la fonction associée au sommet n de ce triangle pour ce triangle. Mais l'angle solide total soutenu par un triangle Δ_{nkl} , donné par l'équation (2.17), est égal à (de Munck, 1992)

$$\Omega(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m) = \Omega_n^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m) + \Omega_k^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m) + \Omega_l^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m), \quad (2.22)$$

alors la somme des quantités Ω_i^* pour un triangle, et donc pour une surface, sont des angles solides et l'égalité (2.15) est vérifiée. Avec ces définitions, de Munck (voir annexe A.2) a évalué $\Omega_n^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m)$ telle que

$$\begin{aligned} \Omega_n^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m) = & \frac{\Omega(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m)}{2\mu_{nkl}} \vec{n} \cdot [(\vec{r}_k - \vec{r}_m) \times (\vec{r}_l - \vec{r}_m)] \\ & + \frac{d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}{4\mu_{nkl}^2} (\vec{r}_k - \vec{r}_l) \cdot [\alpha(\vec{r}_n - \vec{r}_k) + \beta(\vec{r}_k - \vec{r}_l) + \gamma(\vec{r}_l - \vec{r}_n)], \end{aligned} \quad (2.23)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \ln \left(\frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| |\vec{r}_2| + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| |\vec{r}_1| + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_1} \right)$$

et β et γ sont définis d'une façon semblable avec une permutation cyclique des indices (1, 2, 3); \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , et \vec{r}_3 sont les vecteurs issus du point m et pointant vers les sommets n , k , l du triangle Δ_{nkl} , respectivement; \vec{n} est la normale unitaire du triangle Δ_{nkl} vers l'extérieur de la surface et μ_{nkl} est l'aire du triangle Δ_{nkl} .

En employant les équations (2.9), (2.10), et (2.21), l'intégrale de droite de l'équation (2.8) pour un triangle Δ_{nkl} au point d'observation m est égale à (voir figure 2.2a) :

$$\int_{\Delta_{nkl}} \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' \approx - \left(\Phi_n \Omega_n^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m) + \Phi_k \Omega_k^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m) + \Phi_l \Omega_l^*(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m) \right)$$

Si un tiers de l'angle solide total $\Omega(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m)$ soutenu par le triangle Δ_{nkl} est réparti à chaque sommet de ce triangle, on obtient

$$\int_{\Delta_{nkl}} \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' \approx - (\Phi_n + \Phi_k + \Phi_l) \frac{\Omega(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m)}{3}.$$

Cela est l'approche de Barr et al. (1977) mentionnée précédemment. En supposant maintenant que le potentiel est constant sur le triangle Δ_{nkl} , la valeur constante du

potentiel Φ_{nkl} peut être estimée par $\frac{(\Phi_n + \Phi_k + \Phi_l)}{3}$ (voir figure 2.2b). On a alors

$$\int_{\Delta_{nkl}} \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' \approx - \Phi_{nkl} \Omega(\Delta_{nkl}; \vec{r}_m),$$

et on retrouve la méthode du potentiel constant.

Les définitions des fonctions $h_n(\vec{r})$ pour la méthode du potentiel constant aux centroïdes (van Oosterom et Strackee) et pour la méthode du potentiel linéaire aux sommets (de Munck) satisfont toutes les deux les conditions (2.9) et (2.14) nécessaires à la résolution du problème, et les deux approches utilisent une formulation analytique

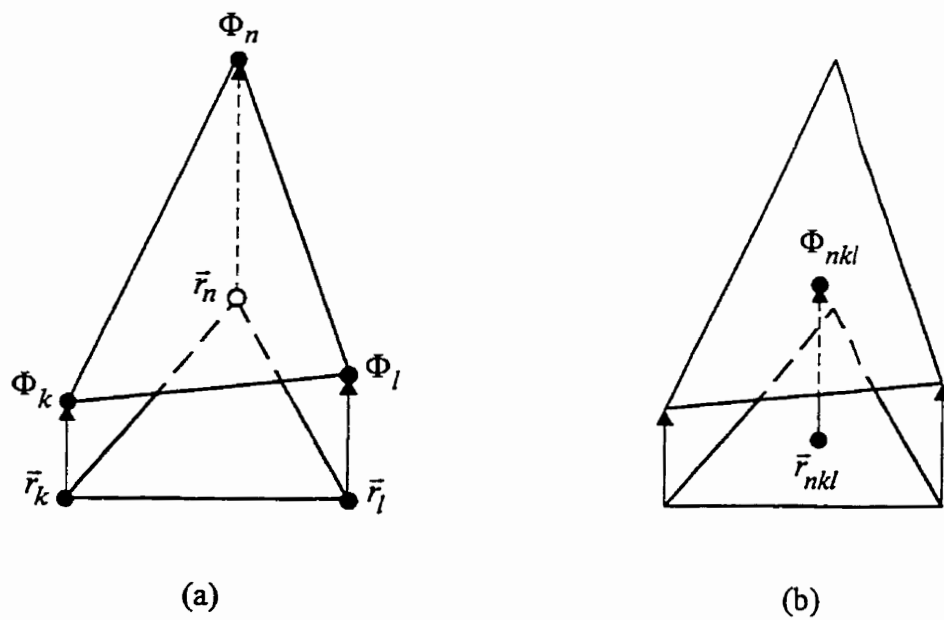


Figure 2.2. Exemple d'un élément de discrétisation, illustrant les approximations décrites dans le texte pour : (a) la méthode des sommets avec une interpolation linéaire du potentiel et (b) la méthode des centroïdes avec un potentiel constant.

exacte pour Ω et Ω^* , respectivement, afin de calculer a_{mn} quand $m \neq n$. Notons que, pour la formulation de l'équation (2.18), comme pour la formulation de l'équation (2.23), le cas $m = n$ n'est pas défini, mais, de toute façon, dans la formulation de l'équation intégrale du potentiel, ce cas a été traité séparément. Un voisinage infiniment petit du point décrit par \vec{r}_m a été exclu de l'intégrale dans l'équation (2.7). Cependant, dans toutes les implémentations numériques, un élément (ou une portion de plusieurs éléments adjacents) de dimension non négligeable a été enlevé, mais cette erreur peut être en partie compensée dans la définition de la diagonale. Notons qu'en général, il est difficile de calculer les angles solides $\Omega^-(S_r; \vec{r}_m)$ et $\Omega^-(\hat{E}(\vec{r}_m); \vec{r}_m)$, mais qu'en prenant

$$a_{mm} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N a_{mn}, \quad (2.24)$$

ces facteurs disparaissent tout en préservant l'égalité (2.15) et donc la singularité de la matrice A . Pour la seconde méthode (l'approche du potentiel linéaire), les quantités contribuant aux sommets adjacents aux points d'observation pour les triangles contenant les deux sommets sont nulles dans l'équation (2.23). Effectivement, $(\vec{r}_m - \vec{r}') \cdot \vec{n}$ de l'équation (2.21) représente la distance perpendiculaire du sommet m au plan passant par le triangle Δ_{nkl} . L'utilisation d'éléments plans peut alors introduire une perte d'information supplémentaire (de notre modèle numérique par rapport aux surfaces qu'on cherche à modéliser) dans les coefficients de la matrice non diagonaux a_{mm_1} , a_{mm_2} , ..., respectivement, où m_1 , m_2 , ..., sont les sommets adjacents à m (voir figure 2.3). De

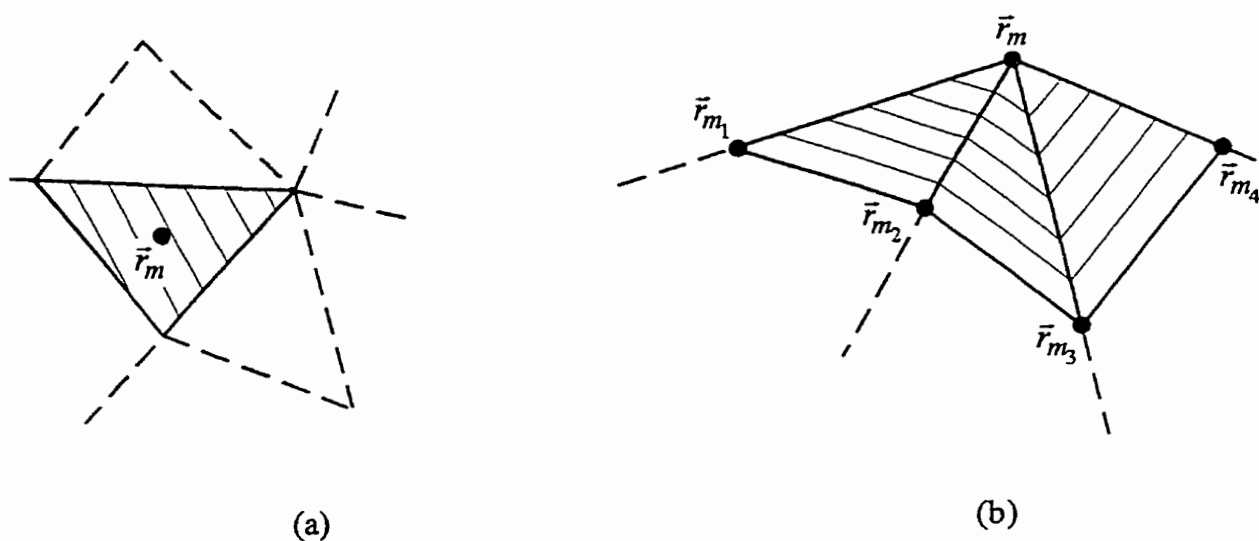


Figure 2.3. Illustration des zones manquantes dans le calcul des angles solides pour (a) la méthode des centroïdes avec un potentiel constant et (b) la méthode des sommets avec une interpolation linéaire du potentiel. Les parties foncées en (a) et (b) indiquent les zones où les quantités Ω et Ω^* , respectivement, sont nulles.

plus, quand l'équation (2.24) est utilisée pour calculer α_{mm} , l'erreur sera transmise à la diagonale. Cependant, pour un modèle de la tête donné, il n'est pas nécessaire de placer toute la quantité manquante sur la diagonale et une portion peut être distribuée aux coefficients voisins non diagonaux. Meijs et al. (1989) et Heller (1990) ont suggéré des méthodes pour compenser cette perte d'information en remplaçant les triangles plans par un ou plusieurs modèles non plans pour calculer l'effet d'un sommet sur ses sommets voisins. Ces deux méthodes supposent, toutes les deux, que les surfaces réelles sont localement sphériques, et ne diffèrent que dans la manière dont la distribution aux éléments voisins est calculée. Meijs utilise un seul cap sphérique pour modéliser un sommet et tous ses voisins, tandis que Heller utilise un triangle sphérique à la place de chaque triangle plan adjacent à un sommet en calculant cet effet. Mais les deux approches introduisent un facteur approximatif dans les équations analytiques, en particulier dans le cas de Meijs, car il est rarement possible de passer un cap sphérique par tous les voisins d'un sommet, surtout pour un modèle de géométrie réaliste, et une telle recherche nécessite une optimisation plutôt élaborée. Pour cette raison, seuls les résultats expérimentaux de l'approche de Heller sont présentés dans le chapitre 4. Notons que Ferguson et Stroink (1997) suggèrent que, globalement, les approches de Meijs et de Heller donnent une précision semblable. Mais, tandis qu'elles peuvent améliorer les résultats pour des surfaces sphériques pour lesquelles elles sont adaptées, elles peuvent aussi les empirer dans le cas de surfaces contenant des coins pointus ou des

zones de grande courbature comme on pourrait en trouver dans un modèle de géométrie réaliste.

2.3 Approche du problème isolé

Si une des régions dans un volume conducteur a une conductivité relativement basse par rapport aux conductivités des autres régions, les erreurs numériques sont amplifiées (Meijs et al., 1987; Hämäläinen, 1987). Pour un modèle de la tête humaine, où le crâne a une conductivité relativement basse, les potentiels plutôt élevés sur le cerveau ne sont pas affectés mais les potentiels sur le crâne et sur le cuir chevelu sont faibles et très sensibles aux erreurs numériques. Supposons que seule la région qui correspond au crâne, soit la région V_{m-1} où $3 \leq m \leq M$ (voir figure 2.4), ait une conductivité relativement basse. Hämäläinen et Sarvas (1989) ont suggéré que ces erreurs peuvent être réduites en calculant d'abord le potentiel isolé sur les surfaces internes au crâne, les surfaces S_m à S_M , en supposant que le crâne est un isolant parfait. L'approche du problème isolé consiste alors à écrire la distribution du potentiel Φ comme la somme de deux parties : le potentiel isolé Φ_0 calculé en supposant que la conductivité de la région V_{m-1} est nulle et le potentiel restant Φ_R défini par

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_0(\vec{r}) + \Phi_R(\vec{r}). \quad (2.25)$$

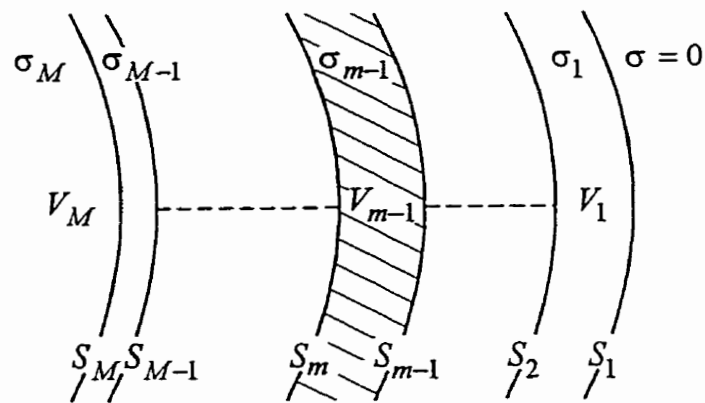


Figure 2.4. Représentation schématique d'un volume conducteur constitué de N surfaces fermées. Les surfaces sont représentées par des arcs mais peuvent être arbitraires. La région $(m-1)$ a une conductivité relativement basse et divise tout le volume conducteur en surfaces internes (S_s , $s = m$ à M) et externes (S_s , $s = 1$ à $m-1$).

Le potentiel isolé Φ_0 sur les surfaces externes au crâne, S_1 à S_{m-1} , est constant et peut être choisi égal à zéro, puisqu'aucune source n'est présente et puisque les courants dans ces régions externes sont nuls. Soit

$$\Phi_0(\vec{r}) = 0$$

pour $R \in S_r$ quand $S_r = S_1$ à S_{m-1} où R est décrit par le vecteur de position \vec{r} . En utilisant l'équation (2.7),

$$\begin{aligned} \omega_0 \Phi_0(\vec{r}) = 4\pi \Phi^\infty(\vec{r}) - \sigma_m^- \int_{S_m/\exists(\vec{r})} \Phi_0(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' \\ - \sum_{s=m+1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \int_{S_s/\exists(\vec{r})} \Phi_0(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}', \end{aligned} \quad (2.26)$$

quand $S_r = S_m$ à S_M . Dans l'équation ci-dessus $\omega_0 = \sigma_m^- \Omega^-(S_m; \vec{r})$ pour $S_r = S_m$ et

$\omega_0 = \sigma_r^- \Omega^-(S_r; \vec{r}) + \sigma_r^+ \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r})$ pour $S_r = S_{m+1}$ à S_M . En remplaçant (2.25)

deux fois dans l'équation (2.7), on obtient le potentiel restant Φ_R ,

$$\begin{aligned} \omega_R \Phi_R(\vec{r}) = 4\pi \Phi^\infty(\vec{r}) - \sum_{s=m}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \int_{S_s/\exists(\vec{r})} \Phi_0(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' \\ - \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \int_{S_s/\exists(\vec{r})} \Phi_R(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' - \omega_R \Phi_0(\vec{r}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

où $\omega_R = \sigma_r^- \Omega^-(S_r; \vec{r}) + \sigma_r^+ \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r})$ pour toute surface S_r . On peut additionner le

terme $\sigma_m^+ \int_{S_m/\exists(\vec{r})} \Phi_0(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}'$ des deux côtés de l'équation (2.26), et remplacer

les deux premiers termes de droite de l'équation (2.27) avec cette nouvelle équation. En

notant que $\omega_0 - \omega_R = -\sigma_m^+ \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r})$ pour $S_r = S_m$ et $\omega_0 - \omega_R = 0$ pour $S_r = S_{m+1}$

à S_M , l'équation du potentiel restant Φ_R peut s'écrire sous une forme analogue à celle

de l'équation (2.7),

$$(\sigma_r^- \Omega^-(S_r; \vec{r}) + \sigma_r^+ \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r})) \Phi_R(\vec{r}) =$$

$$4\pi \Phi_R^\infty(\vec{r}) - \sum_{s=1}^M (\sigma_s^- - \sigma_s^+) \int_{S_s/\exists(\vec{r})} \Phi_R(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}', \quad (2.28)$$

où le terme source $\Phi_R^\infty(\vec{r})$ est donné par (Meijs et al., 1989)

$$\Phi_R^\infty(\vec{r}) = \frac{\sigma_m^+}{4\pi} \left[\int_{S_m/\exists(\vec{r})} \Phi_0(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' - \delta_{rm} (4\pi - \Omega^-(S_m; \vec{r})) \Phi_0(\vec{r}) \right], \quad (2.29)$$

en rappelant que $\Omega^-(S_r; \vec{r}) + \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r}) = 4\pi$ et que $\Phi_0(\vec{r}) = 0$ pour $S_r = S_1$ à

S_{m-1} . Les équations (2.26) et (2.28) sont toutes les deux des équations intégrales de

Fredholm du second type et peuvent être résolues numériquement (voir section 2.2). Si

plus d'une région dans le volume conducteur a une conductivité relativement basse,

l'approche du problème isolé peut être utilisée plusieurs fois. Mais, comme on l'a

mentionné précédemment, il est généralement impossible de calculer les angles solides $\Omega^-(S_r; \vec{r})$ et $\Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r})$ et cette fois ils sont dans le terme source (voir équation (2.29)).

Maintenant, si l'on considère que l'interface S_m entre les régions de basse et de haute conductivité est la surface la plus interne, c'est-à-dire que $S_m = S_M$, la somme de droite de l'équation (2.26) est nulle et on peut alors écrire

$$\int_{S_m/\exists(\vec{r})} \Phi_0(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}' = -\Omega^-(S_m; \vec{r}) \Phi_0(\vec{r}) + \frac{4\pi}{\sigma_m^-} \Phi^\infty(\vec{r}),$$

pour $S_r = S_m$ et $\Phi_0(\vec{r}) = 0$ pour $S_r = S_1$ à S_{m-1} . On peut multiplier les deux côtés de l'équation ci-dessus par $-(\sigma_m^- - \sigma_m^+)$ et remplacer la nouvelle équation dans l'équation (2.27) dans laquelle $S_m = S_M$. En rappelant encore une fois que $\Omega^-(S_r; \vec{r}) + \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r}) = 4\pi$, on obtient l'équation (2.28) mais avec (Hämäläinen et Sarvas, 1989) :

$$\Phi_R^\infty(\vec{r}) = \sigma_m^+ \left[\frac{1}{\sigma_m^-} \Phi^\infty(\vec{r}) - \delta_{rm} \Phi_0(\vec{r}) \right]. \quad (2.30)$$

Cette fois-ci, l'expression pour le terme source ne contient pas l'angle solide $\Omega^-(S_m; \vec{r})$.

En utilisant l'approche du problème isolé, l'amplification des erreurs numériques est diminuée car le volume conducteur utilisé pour calculer le potentiel isolé Φ_0 ne contient pas de régions de basse conductivité, et le potentiel restant Φ_R ne montre pas

non plus d'amplification d'erreur avec réduction de σ_m^+ . Meijs et al. (1989) donnent les deux arguments suivants pour justifier la dernière constatation : 1) le nouveau terme de source pour Φ_R est proportionnel à σ_m^+ (équations (2.29) et (2.30)) et 2) l'amplitude de Φ_R est petite sur les surfaces internes (i.e., quelques pour cent du potentiel total Φ) et est réduite quand σ_m^+ est diminuée, étant donné que, pour le calcul de Φ_0 , la conductivité σ_m^+ est supposée nulle. Alors, comme le terme de source et le terme de volume de Φ_R (équation (2.28)) vont être réduits quand σ_m^+ est diminuée, l'amplification de l'erreur va être réduite si l'approche du problème isolé est utilisée.

Notons que, quand la surface peut être considérée comme lisse (Barnard et al., 1967) - ce qui est le cas pour l'approche des centroïdes avec un potentiel constant - on sait que $\Omega^-(S_s; \vec{r}_m) = \Omega^-(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r}_m) = 2\pi$. On peut alors utiliser l'approche du problème isolé pour le cas général (l'équation (2.29) avec $4\pi - \Omega^-(S_m; \vec{r}) = 2\pi$), où l'interface intérieure S_m entre la région de basse et de haute conductivité n'est pas nécessairement la plus interne, ce qui améliore davantage les résultats pour ce type de volume conducteur. Cela est le cas quand, par exemple, on considère une région contenant le liquide cérébro-spinal entre le cerveau et le crâne.

CHAPITRE 3 MÉTHODE RÉCIPROQUE POUR LA RÉOLUTION DU PROBLÈME DIRECT

3.1 Dérivation des équations

Comme dans le chapitre 2, on considère les surfaces S_s ($s = 1, 2, \dots, M$), fermées et non sécantes, séparant les régions homogènes V_s ($s = 1, 2, \dots, M$) distinctes de conductivité isotrope σ_s . Considérons la différence de potentiel entre deux électrodes placées sur la surface externe S_1 du volume conducteur et due à un dipôle à l'intérieur de ce volume. Selon le théorème de réciprocité, cette différence peut être obtenue en calculant le champ électrique à l'emplacement de ce dipôle quand un courant unitaire est injecté par une des deux électrodes et retiré par l'autre. On cherche donc à calculer le champ électrique résultant de cette injection de courant au point du volume conducteur qui correspond au dipôle. Pour les méthodes comme les éléments finis (FEM), où le volume conducteur en entier est discrétisé en éléments volumiques, le calcul du potentiel et du flux de l'élément qui contient le dipôle amène directement au champ électrique à ce point (le champ électrique correspond au gradient du potentiel). Mais, pour la méthode des éléments de frontières (BEM), cela nécessite le calcul préalable du potentiel et du flux de courant sur la surface qui englobe la région contenant le dipôle. Dans une deuxième

étape, ce potentiel et ce flux sont utilisés pour estimer le champ électrique à l'emplacement du dipôle qui nous intéresse.

Soit $I(\vec{r})$ l'intensité du courant rentrant en un point R (caractérisé par le vecteur \vec{r}) de la surface externe S_1 du volume conducteur. On a l'expression suivante pour $I(\vec{r})$

$$I(\vec{r}) = \lim_{\hat{E}(\vec{r}) \rightarrow \{\vec{r}\}} \left\{ \int_{\hat{E}(\vec{r})} \Psi(\vec{r}') dS' \right\}, \quad R \in S_1 \quad (3.1)$$

où Ψ est le flux rentrant dans le volume conducteur. L'intégrale est prise sur un voisinage $\hat{E}(\vec{r})$ du point R quand $\hat{E}(\vec{r})$ tend vers $\{\vec{r}\}$. Pour le problème réciproque, on sait que $I(\vec{r}) = I$ au site du courant injecté, $I(\vec{r}) = -I$ au site du courant retiré, et $I(\vec{r}) = 0$ partout ailleurs sur la surface S_1 .

Pour le restant des potentiels et des flux, la formulation de la BEM pour une injection de courant repose encore une fois sur la seconde identité de Green. En rappelant que $\forall S_s(V_r)$ dénote que la somme est prise sur toutes les surfaces S_s qui délimitent un volume quelconque V_r du volume conducteur, on a

$$\int_{V_r} [\sigma_r (\phi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \phi)] dV = \sum_{\forall S_s(V_r)} \int_{S_s} [\sigma_r (\phi \nabla \phi - \phi \nabla \phi)] \cdot d\vec{S} \quad (2.2)$$

avec $\phi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ et $\phi = \Phi$, où $|\vec{r} - \vec{r}'|$ et Φ sont définis comme avant. Cependant, cette

fois-ci, on ne veut plus éliminer l'expression représentant le flux. Les équations (2.2)

pour les différents volumes V_s peuvent alors être traitées séparément plutôt que de prendre leur somme comme dans le chapitre 2. De plus, le volume conducteur ne contient aucune source de courant et le potentiel est décrit par l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (1.3)$$

Dans cette formulation réciproque, les sources ont effectivement été déplacées aux sites d'injection de courant. En notant que $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$, où \vec{n} est la normale à la surface S_s vers l'extérieur du volume V_r , l'équation (2.2) devient

$$\begin{aligned} - \int_{V_r} \sigma_r \Phi(\vec{r}') \nabla'^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' &= \sum_{\forall S_s(V_r)} \int_{S_s} \Psi(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \\ &- \sum_{\forall S_s(V_r)} \int_{S_s} \sigma_r \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}'. \end{aligned} \quad (3.2)$$

où $\Psi = \sigma_r \nabla \Phi \cdot \vec{n}$ est le flux rentrant dans le volume V_r .

L'intégrale de gauche de l'équation (3.2) est la même que celle du deuxième terme de gauche de l'équation (2.5). Alors, en choisissant le point R à l'intérieur du volume V_r , l'intégrale sera égale à $-4\pi\sigma_r\Phi(\vec{r})$. D'où,

$$4\pi\sigma_r\Phi(\vec{r}) = \sum_{\forall S_s(V_r)} \int_{S_s} \Psi(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' - \sum_{\forall S_s(V_r)} \sigma_r \int_{S_s} \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}'. \quad (3.3)$$

Pour calculer les potentiels et les flux de surface, on considère que le point d'observation R est infiniment près d'une des surfaces $\forall S_s(V_r)$ mais strictement à l'intérieur du volume V_r . La singularité qui apparaît alors dans la seconde intégrale de droite dans

l'équation (3.3) quand \bar{r}' s'approche de \bar{r} peut être sortie de l'intégrale comme dans le chapitre précédent. Soit $\Omega(\hat{E}(\bar{r}); \bar{r})$ l'angle solide soutenu par $\hat{E}(\bar{r})$ au point d'observation R quand $\hat{E}(\bar{r})$ tend vers $\{\bar{r}\}$, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_r(4\pi - \Omega(\hat{E}(\bar{r}); \bar{r}))\Phi(\bar{r}) = & \sum_{\forall S_s(V_r)} \int_{S_s} \Psi(\bar{r}') \frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dS' \\ & - \sum_{\forall S_s(V_r)} \sigma_r \int_{S_s/\Xi(\bar{r})} \Phi(\bar{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} \right) \cdot \bar{n} dS'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

La singularité de la première intégrale de droite de l'équation (3.4) est traitée dans la section 3.2.

L'équation (3.4) est l'équation intégrale pour le potentiel et le flux de surface dans le cas d'une région homogène de conductivité isotrope (Brebbia et Dominguez, 1989), et une équation semblable peut être écrite pour chaque volume V_s du volume conducteur. À partir des flux connus de la surface externe (équation (3.1)), il est possible de résoudre numériquement le système d'équations formé par tous ces volumes pour les distributions de potentiel et de flux sur toutes les surfaces (voir section 3.3). En connaissant celles-ci, il est également possible de calculer la valeur du potentiel, ou ses dérivées, à l'intérieur des surfaces en question en utilisant l'équation (3.3). Soit V_a le volume qui contient toutes les sources dipolaires (par exemple, le cerveau). On veut donc trouver le champ électrique $\vec{E}(\bar{r})$ à un certain point R à l'intérieur du volume V_a . Dans ce cas, R est strictement à l'intérieur des surfaces $\forall S_s(V_a)$ et les intégrales de

l'équation (3.3) ne sont pas singulières. D'après l'équation (1.1), soit $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$, et l'équation (3.3), on peut écrire

$$E_x(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial x}[\Phi(\vec{r})] = \frac{1}{4\pi} \sum_{\forall S_s(V_a)} \int_{S_s} \Phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x} \left[\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{n} \right] dS' - \frac{1}{4\pi\sigma_a} \sum_{\forall S_s(V_a)} \int_{S_s} \Psi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dS', \quad (3.5)$$

et de même pour $E_y(\vec{r})$ et $E_z(\vec{r})$, où $E_x(\vec{r})$, $E_y(\vec{r})$, $E_z(\vec{r})$ sont les composantes cartésiennes du champ électrique au point R , et x, y, z sont les coordonnées cartésiennes de ce point. Maintenant, en utilisant l'équation (1.6), on peut trouver la différence de potentiel entre les électrodes de surface, due à un dipôle de courant situé au point R .

3.2 Discrétisation des équations

Comme on l'a vu auparavant, on décompose les surfaces S_s en N_s^Δ éléments $\Delta_l^{(s)}$ qui ne se coupent que suivant leurs frontières communes. L'équation (3.4) applicable au volume V_r devient donc

$$\sigma_r(4\pi - \Omega(\hat{E}(\vec{r}); \vec{r}))\Phi(\vec{r}) = \sum_{\forall S_s(V_r)} \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)}} \Psi(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$$

$$- \sigma_r \sum_{\forall S_s(V_r)} \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} / \exists(\vec{r})} \Phi(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{n} dS'. \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) peut être résolue de façon approximative en choisissant deux ensembles de fonctions $\{h_n^{(r)}(\vec{r})\}_{n=1}^{N^{(r)}}$ et $\{g_n^{(r)}(\vec{r})\}_{n=1}^{N^{(r)}}$, et un ensemble de $N^{(r)}$ points discrets sur les surfaces $\forall S_s(V_r)$ décrits par les vecteurs de position $\{\vec{r}_m\}_{m=1}^{N^{(r)}}$, tels que :

$$h_n^{(r)}(\vec{r}_m) = \delta_{nm}, \quad (3.7)$$

et

$$g_n^{(r)}(\vec{r}_m) = \delta_{nm}. \quad (3.8)$$

Notons que $N^{(r)} = \sum_{\forall S_s(V_r)} N_s$, où N_s est le nombre de points discrets sur la surface S_s .

On peut estimer le potentiel avec l'expansion

$$\hat{\Phi}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N^{(r)}} \Phi_n^{(r)} h_n^{(r)}(\vec{r}), \quad (3.9)$$

et de même pour le flux,

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N^{(r)}} \Psi_n^{(r)} g_n^{(r)}(\vec{r}), \quad (3.10)$$

où les coefficients $\Phi_i^{(r)}$ et $\Psi_i^{(r)}$ représentent les inconnues, dont on détermine les valeurs en contraignant $\hat{\Phi}(\vec{r})$ et $\hat{\Psi}(\vec{r})$ à satisfaire l'équation (3.6) aux points discrets caractérisés par \vec{r}_i . Pour un point $R \in \forall S_s(V_r)$ caractérisé par le vecteur $\vec{r} = \vec{r}_m$, nous

avons $\hat{\Phi}(\vec{r}_m) = \Phi_m^{(r)}$ et $\hat{\Psi}(\vec{r}_m) = \Psi_m^{(r)}$, d'après les équations (3.7), (3.9), et (3.8), (3.10), respectivement. Donc, en regroupant les potentiels d'un côté et les flux de l'autre, nous obtenons

$$\sigma_r \sum_{n=1}^{N^{(r)}} \Phi_n^{(r)} \left[\sum_{\forall S_s(V_r)} \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} / \exists(\vec{r}_m)} h_n^{(r)}(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{n} dS' + \delta_{nm} (4\pi - \Omega(\hat{E}(\vec{r}_m); \vec{r}_m)) \right] =$$

$$\sum_{n=1}^{N^{(r)}} \Psi_n^{(r)} \sum_{\forall S_s(V_r)} \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)}} g_n^{(r)}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dS'. \quad (3.11)$$

Si l'on varie \vec{r}_m sur l'ensemble de points discrets $\{\vec{r}_m\}_{m=1}^{N^{(r)}}$, l'équation (3.11) se réduit à

$$U^{(r)} \Phi^{(r)} = Q^{(r)} \Psi^{(r)}, \quad (3.12)$$

où $\Phi^{(r)}$ et $\Psi^{(r)}$ sont les vecteurs colonnes de dimension $N^{(r)}$ contenant, respectivement, les potentiels et les flux des surfaces $\forall S_s(V_r)$. Les coefficients des matrices $U^{(r)}$ et $Q^{(r)}$ (dites matrices d'influence) sont donnés par

$$u_{mn}^{(r)} = \sigma_r \left[\sum_{\forall S_s(V_r)} \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} / \exists(\vec{r}_m)} h_n^{(r)}(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{n} dS' + \delta_{nm} (4\pi - \Omega(\hat{E}(\vec{r}_m); \vec{r}_m)) \right],$$

(3.13)

et

$$q_{mn}^{(r)} = \sum_{\forall S_s(V_r)} \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)}} g_n^{(r)}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dS', \quad (3.14)$$

respectivement.

Le problème est encore une fois mal posé. En supposant qu'on connaisse le flux (qui est proportionnel au gradient du potentiel) sur toutes les surfaces $\forall S_s(V_r)$, il est évident que le potentiel ne peut être calculé qu'à une constante près. Comme dans le chapitre 2, le lien entre nos équations discrètes et le problème réel, physique est assuré par la condition

$$\sum_{n=1}^{N^{(r)}} h_n^{(r)}(\vec{r}) = 1, \quad (3.15)$$

où \vec{r} décrit un point d'une des surfaces $\forall S_s(V_r)$, et on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{N^{(r)}} u_{mn}^{(r)} = \sigma_r \sum_{\forall S_s(V_r)} \sum_{l=1}^{N_s^\Delta} \int_{\Delta_l^{(s)} \setminus \exists(\vec{r}_m)} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{n} dS' + \sigma_r (4\pi - \Omega(\hat{E}(\vec{r}_m); \vec{r}_m)) = 0, \quad (3.16)$$

en notant que l'intégrale ci-dessus est égale à $-(4\pi - \Omega(\hat{E}(\vec{r}_m); \vec{r}_m))$ pour toutes les surfaces $\forall S_s(V_r)$. Ceci implique que le flux est nul sur toutes les surfaces délimitant un volume quand un potentiel uniforme est appliqué sur ce volume, ce qui est le cas physiquement. Le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ de longueur $N^{(r)}$ est donc un vecteur propre de $U^{(r)}$ de valeur propre zéro et la matrice est singulière (voir section 3.3).

De la même façon, on peut réécrire l'équation (3.5) sous la forme discrète

s suivante

$$E_x(r) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N(a)} \Phi_n^{(a)} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{\Delta_l^{(s)}} h_n^{(a)}(r_l) \left[\frac{\partial}{\partial x} \Delta_l^{(s)} \left(\frac{1}{|r - r_l|} \right) \cdot n \right] pS,$$

$$- \frac{1}{4\pi\sigma_a} \sum_{n=1}^{N(a)} \Psi_n^{(a)} \sum_{s=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{\Delta_l^{(s)}} g_n^{(a)}(r_l) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|r - r_l|} \right) \right] pS, \quad (3.17)$$

et de même pour $E_y(r)$ et $E_z(r)$. Notons que l'intégration numérique (voir annexe

A.3), pour les différentes méthodes dont il est question dans les paragraphes suivants,

peut également être employée pour calculer l'équation (3.17).

3.2.1 Méthode du potentiel et du flux constants aux centroïdes de triangles plans

Encore une fois, le choix le plus simple pour les fonctions $h_n^{(r)}(r)$ et $g_n^{(r)}(r)$ est

obtenu en divisant les surfaces en triangles, et en prenant $h_n^{(r)}(r)$ et $g_n^{(r)}(r)$ égales à 1

sur le triangle n et zéro ailleurs. Les points discrets deviennent les centroïdes des triangles, et le nombre de points discrets est égal au nombre d'éléments de surface, soit

$N_s = N_\Delta$, où N_s est le nombre de points discrets sur S_s , et S_s est une des surfaces

délimitant le volume V_p . Il est évident que, dans ce cas, l'équation (3.1) devient

$\Psi_l = I(r_l)/\mu_l$, où l est un point de la surface externe du volume conducteur et μ_l est

l'aire du triangle Δ_i . On déduit l'expression des coefficients non diagonaux de la matrice

$U^{(r)}$ à partir de l'équation (3.13),

$$u_{mn}^{(r)} = \sigma_r \int_{\Delta_n} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{n} dS', \quad (m \neq n) \quad (3.18)$$

et celle des coefficients hors diagonaux de $Q^{(r)}$ à partir de l'équation (3.14),

$$q_{mn}^{(r)} = \int_{\Delta_n} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dS', \quad (m \neq n) \quad (3.19)$$

où $\Delta_n = \Delta_n^{(s1)}$ quand le triangle n est sur la première surface S_{s1} délimitant le volume

V_r , $\Delta_n = \Delta_{n-N_{s1}}^{(s2)}$ quand le triangle est sur la seconde surface et ainsi de suite. Les

intégrales des équations (3.18) et (3.19) peuvent être approchées numériquement sur

plusieurs types d'éléments en utilisant l'intégration par points (Brebbia et Dominguez,

1989). Les coefficients des matrices $U^{(r)}$ et $Q^{(r)}$ pour le cas où $m \neq n$ sont donnés par

(voir annexe A.3)

$$u_{mn}^{(r)} = -\sigma_r 2\mu_n \lambda_{m,n} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}_j|^3} w_j, \quad (3.20)$$

où μ_n est l'aire du triangle n et $\lambda_{m,n} = (\vec{r}' - \vec{r}_m) \cdot \vec{n}$ est la distance perpendiculaire du

point m au plan passant par le triangle n , et

$$q_{mn}^{(r)} = 2\mu_n \sum_{j=1}^{N_p} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}_j|} w_j. \quad (3.21)$$

Les intégrales sont alors estimées en les évaluant en N_p points sur chaque triangle et en prenant la somme pondérée de ces valeurs (w_j est le poids associé au point j). Il est évident qu'un plus grand nombre de points améliora l'approximation. Cependant, l'ordre de la quadrature de Gauss pour les triangles dépasse rarement treize points (voir annexe A.3).

Notons que l'équation (3.18) peut aussi être écrite sous la forme (voir chapitre 2)

$$u_{mn}^{(r)} = -\sigma_r \Omega(\Delta_n; \bar{r}_m), \quad (m \neq n)$$

où $\Omega(\Delta_n; \bar{r}_m)$ est l'angle solide total soutenu par le triangle Δ_n au point m . Dans ce cas, une expression analytique, comme l'équation (2.18) (van Oosterom et Strackee, 1983), peut aussi être utilisée pour évaluer cette intégrale. Actuellement, il n'existe pas d'expression analytique pour l'intégrale de l'équation (3.19), ni d'ailleurs pour les intégrales de l'équation (3.17).

3.2.2 Méthode du potentiel et du flux linéaires aux sommets de triangles plans

Les éléments de discrétisation pour une surface sont usuellement les triangles. En supposant que le potentiel et le flux varient de façon linéaire sur des triangles plans, tout en restant continus d'un élément à l'autre, les points discrets sont maintenant les sommets des triangles (soient \bar{r}_n , \bar{r}_k , et \bar{r}_l les vecteurs aux sommets du triangle Δ_{nkl} , où n, k, l

sont ordonnés dans le sens trigonométrique positif vu d'un point extérieur mais près du triangle). Les fonctions $h_n^{(r)}(\vec{r})$ et $g_n^{(r)}(\vec{r})$ pour cette méthode sont données par

$$\begin{cases} h_n^{(r)}(\vec{r}) = \frac{d(\vec{r}; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}{d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}, & \vec{r} \in \Delta_{nkl} \\ = 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.22)$$

et

$$\begin{cases} g_n^{(r)}(\vec{r}) = \frac{d(\vec{r}; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}{d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}, & \vec{r} \in \Delta_{nkl} \\ = 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.23)$$

pour chaque triangle Δ_{nkl} qui contient le sommet n caractérisé par le vecteur position \vec{r}_n , et $d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l)$ est le déterminant du triangle Δ_{nkl} . Les fonctions atteignent la valeur 1 au sommet n , et s'annulent au côté opposé des triangles dont n est un sommet. Notons que les avantages mentionnés au chapitre 2 de l'utilisation des sommets plutôt que des centroïdes des triangles sont encore valables pour le problème réciproque. Les coefficients non diagonaux de la matrice $U^{(r)}$ de l'équation (3.13) sont alors

$$u_{mn}^{(r)} = \sigma_r \sum_{\forall \Delta_{n(kl)} \Delta_{nkl}} \int \frac{d(\vec{r}'; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}{d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l)} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot \vec{n} dS', \quad (m \neq n) \quad (3.24)$$

et de la matrice $Q^{(r)}$ de l'équation (3.14),

$$q_{mn}^{(r)} = \sum_{\forall \Delta_{n(kl)} \Delta_{nkl}} \int \frac{d(\vec{r}'; \vec{r}_k; \vec{r}_l)}{d(\vec{r}_n; \vec{r}_k; \vec{r}_l)} \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) dS', \quad (m \neq n) \quad (3.25)$$

où $\forall \Delta_{n(kl)}$ dénote que la somme est prise sur tous les triangles Δ_{nkl} incluant le sommet n . Les intégrales des équations (3.24) et (3.25) pour un potentiel et un flux à variation linéaire sur chaque triangle, associés à leurs valeurs aux sommets de ce triangle, peuvent aussi être approximées numériquement en utilisant l'intégration par points. Donc, pour le cas où $m \neq n$, les coefficients des matrices $U^{(r)}$ et $Q^{(r)}$ sont (voir annexe A.3)

$$u_{mn}^{(r)} = -\sigma_r \sum_{\forall \Delta_{n(kl)}} \frac{2\mu_{nkl} \lambda_{m,nkl}}{d(\bar{r}_n; \bar{r}_k, \bar{r}_l)} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{d(\bar{r}_j; \bar{r}_k, \bar{r}_l)}{|\bar{r}_m - \bar{r}_j|^3} w_j, \quad (3.26)$$

et

$$q_{mn}^{(r)} = \sum_{\forall \Delta_{n(kl)}} \frac{2\mu_{nkl}}{d(\bar{r}_n; \bar{r}_k, \bar{r}_l)} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{d(\bar{r}_j; \bar{r}_k, \bar{r}_l)}{|\bar{r}_m - \bar{r}_j|} w_j, \quad (3.27)$$

où $\lambda_{m,nkl}$ est la distance perpendiculaire du sommet m au plan passant par le triangle Δ_{nkl} et μ_{nkl} est l'aire de ce triangle. En écrivant l'équation (3.24) sous une forme semblable à celle de l'équation (2.20),

$$u_{mn}^{(r)} = \sigma_r \sum_{\forall \Delta_{n(kl)}} \Omega_n^*(\Delta_{nkl}; \bar{r}_m), \quad (m \neq n)$$

les coefficients de la matrice $U^{(r)}$ peuvent être évalués analytiquement, comme pour la méthode du potentiel constant, en utilisant l'équation (2.23) (de Munck, 1992) présentée dans le chapitre 2.

Dans les sections précédentes, on a supposé que le potentiel et le flux étaient constants ou variaient de façon linéaire sur chaque élément. Mais, en général, ils peuvent

avoir une variation plus complexe, auquel cas nos fonctions d'interpolation restent des approximations. En plus, leurs comportements fonctionnels respectifs ne sont pas du même ordre, vu que le flux est proportionnel à la dérivée du potentiel. Cependant, en pratique, il est beaucoup plus simple de prendre la même fonction pour les deux. Ce qu'il faut noter, c'est que sur certains éléments il y aura une très grande variation du potentiel et du flux, notamment sur les éléments près des sites d'injection de courant. La solution est donc particulièrement sensible à toute erreur numérique dans les intégrations sur les triangles proches de ces sites. Mais les électrodes d'injection de courant sont à des emplacements connus dans la méthode réciproque. Ces emplacements sont les sites des électrodes de mesure. Dans ce cas, on peut améliorer nos solutions en augmentant le nombre de points d'intégration (voir annexe A.3), en raffinant la discrétisation existante de nos surfaces ou en prenant une fonction d'interpolation d'ordre supérieur sur les éléments aux alentours de ces points. L'approche la plus simple est d'augmenter le nombre d'éléments autour des sites d'électrodes de mesure sur la surface externe du volume conducteur et sur les autres surfaces si elles sont suffisamment près. Malgré cela, en considérant les sommets de triangles, la normale et donc le flux (soit $\Psi = \sigma_r \nabla \Phi \cdot \vec{n}$) ne sont pas définis à strictement parler et cela peut rajouter un facteur approximatif supplémentaire dans nos équations. En effet, pour la méthode du potentiel linéaire aux sommets de triangles, le flux au site d'injection de courant est estimée numériquement

comme $\Psi_i = I(\vec{r}_i) \left/ \sum_{\forall \Delta_{i(kl)}} \frac{\mu_{ikl}}{3} \right.$, où μ_{ikl} est l'aire du triangle Δ_{ikl} adjacent au point

$i \in S_1$ (voir équation (3.1)). Cependant pour l'approche réciproque, on peut, en plus, utiliser une fonction d'interpolation d'ordre supérieur en insérant, par exemple, un quadrilatère curviligne sur lequel le potentiel et le flux varient de façon quadratique et chaque site d'électrode d'injection correspond au centre. Notons que, dans ce cas, la contribution de ces quadrilatères aux coefficients des matrices $U^{(r)}$ et $Q^{(r)}$ (équations (3.26) et (3.27)) sera modifiée, et la valeur du flux aux sites d'injection de courant (équation (3.1)) devra être calculée numériquement (voir annexe A.3).

Comme on l'a déjà mentionné, certaines intégrales singulières peuvent apparaître en calculant les matrices d'influence. La plupart du temps, elles correspondent aux diagonales de ces matrices quand le point d'observation se trouve sur l'élément même qu'on veut intégrer. Dans le cas de la matrice $U^{(r)}$, tout comme la matrice A du chapitre 2, la valeur singulière a été sortie de l'intégrale (voir section 3.1) car les propriétés physiques du problème nous permettent de calculer séparément les coefficients de la diagonale. En notant que les définitions des fonctions $h_n^{(r)}(\vec{r})$ et $g_n^{(r)}(\vec{r})$ pour la méthode du potentiel constant et pour la méthode du potentiel linéaire satisfont toutes les deux les conditions (3.7), (3.8), et (3.15), l'équation (3.16) nous permet effectivement de prendre :

$$u_{mm}^{(r)} = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{N^{(r)}} u_{mn}^{(r)}. \quad (3.28)$$

Pour la méthode linéaire, les intégrales de l'équation (3.26) contribuant aux sommets voisins d'un point d'observation sur le même triangle plan sont nulles. Les modifications pour des surfaces sphériques proposées par Meijs et al. (1989) et Heller (1990) dans le chapitre 2 s'appliquent aussi, dans ce cas, à la matrice $U^{(r)}$. Mais, en général, on doit évaluer directement ces intégrales et, même si elles ne sont pas exactement singulières ($\bar{r}_m - \bar{r}_j \neq 0$) et même avec un grand nombre de points d'intégration, une intégration numérique de type quadrature de Gauss sera peu précise quand \bar{r}_m est très proche de \bar{r}_j .

Pour la diagonale et les coefficients de la matrice $Q^{(r)}$ correspondant aux voisins d'un point d'observation, il existe des solutions analytiques exactes pour les deux méthodes à base de triangles plans (voir annexe A.4). Pour les quadrilatères curvilignes, les coefficients de la matrice $U^{(r)}$ et $Q^{(r)}$ peuvent seulement être estimés numériquement. Dans l'annexe A.4, on décrit une approche plus précise pour ces intégrales singulières ou presque, qui consiste à diviser nos quadrilatères curvilignes en triangles plans. Notons que, pour des éléments qui ne sont pas plans, les intégrales de $U^{(r)}$ contribuant aux sommets adjacents à un point d'observation sur le même élément sont non nulles : $(\bar{r}_m - \bar{r}') \cdot \bar{n} \neq 0$. Les modifications de Meijs et Heller, qui cherchent à compenser la perte d'information associée à l'utilisation de triangles plans dans notre modèle numérique (voir chapitre 2), sont bien sûr redondantes pour ces éléments curvilignes.

3.3 Résolution du système matriciel

En regroupant les matrices $U^{(r)}$ d'un côté de l'équation (3.12) et les matrices $Q^{(r)}$ de l'autre pour tous les volumes V_s ($s = 1, 2, \dots, M$) du volume conducteur, on obtient un ensemble de $N^{(1)} + N^{(2)} + \dots + N^{(M)}$ équations linéaires. Mais on cherche les valeurs de potentiel et de flux sur toutes les surfaces à partir de la distribution du flux sur la surface externe, soit $N^{(1)} + 2(N^{(2)} + N^{(3)} + \dots + N^{(M)})$ inconnus. Cependant, en considérant les interfaces communes entre régions et les propriétés du potentiel et du flux à ces interfaces, il est possible d'assembler un système d'équations pour le volume conducteur en entier qui permet la résolution numériquement de ce problème. Comme on l'a vu auparavant, à la fois le potentiel et la composante normale du courant restent continus à travers une interface S_s . Donc, sur chaque surface à l'intérieur du volume conducteur, on a les relations

$$\Phi^- = \Phi^+$$

et

$$\sigma_s^- \nabla \Phi^- \cdot \vec{n} = \sigma_s^+ \nabla \Phi^+ \cdot \vec{n},$$

où les exposants $+$ et $-$ dénotent que les valeurs sont prises juste à l'extérieur et juste à l'intérieur de la surface S_s , respectivement. Notons que \vec{n} est maintenant la normale positive (c'est-à-dire vers la région de conductivité σ_s^+) à la surface S_s en question.

Soit $\Psi^- = \sigma_s^- \nabla \Phi^- \cdot \vec{n}$ et $\Psi^+ = -\sigma_s^+ \nabla \Phi^+ \cdot \vec{n}$ les flux rentrant et sortant d'une surface

S_s , respectivement. On a alors $\Psi^- = -\Psi^+$, et on peut définir les matrices U et Q telles que

$$\begin{cases} u_{mn} = u_{mn}^{(r)}, & m, n \in \forall S_s(V_r) \\ = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_{mn} = q_{mn}^{(r)}, & m, n \in \forall S_s(V_r) \\ = -q_{mn}^{(r)}, & m, n \in \forall S_s(V_r) \text{ et si } V_r \text{ englobe } S_s \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient alors la nouvelle équation matricielle

$$U\Phi = Q\Psi, \quad (3.29)$$

où Φ et Ψ sont les vecteurs colonnes contenant, respectivement, les potentiels et flux de surface de dimension $N_1 + N_2 + \dots + N_M$, où N_s signifie le nombre de points discrets sur la surface S_s .

En appliquant les conditions de frontière du problème (les valeurs des flux sur la surface externe S_1 (équation (3.1))) on résout le côté droit de l'équation (3.29) et on peut réécrire cette dernière sous la forme

$$AY = F, \quad (3.30)$$

où A est une matrice carrée d'ordre $N_1 + 2(N_2 + \dots + N_M)$ et Y est le vecteur colonne contenant toutes les inconnues (toutes les valeurs de potentiel suivies des valeurs du flux sur les surfaces internes du volume conducteur). La résolution de l'équation (3.30) nécessite l'inversion de la matrice A , mais le problème reste mal posé et la matrice

singulière. En effet, le potentiel est toujours mesuré par rapport à une référence. Cependant, la matrice peut être régularisée en choisissant un potentiel de référence. À cette fin, le potentiel d'un point arbitraire peut être fixé ou la moyenne des potentiels sur la surface externe peut être forcée à zéro. Cette dernière approche est semblable à la technique de déflation introduite dans le chapitre 2, mais la déflation au sens strict n'a pas été prouvée mathématiquement pour la matrice A en question (voir annexe A.1). Notons que le gradient du potentiel, soit le flux, peut être numériquement très proche d'une simple différence de potentiel - une différence entre points de surfaces distinctes, alignés selon la normale d'un des points. En pratique, cette relation linéaire entre flux et potentiel affaiblit l'indépendance des équations (3.30), et la matrice A peut être relativement mal conditionnée même si elle reste numériquement inversible. L'effet exact de ce conditionnement sur la précision de nos solutions n'a pas été exploré, ni d'ailleurs l'amélioration éventuelle que pourrait apporter une résolution itérative du système matricielle, au lieu de la décomposition LU utilisée.

CHAPITRE 4 RESULTATS ET DISCUSSION

4.1 Modèle à trois sphères concentriques

Plusieurs modèles de type éléments de frontières ont été construits. Chaque modèle représente trois sphères concentriques avec une surface intérieure (le cerveau) d'un rayon de 8.7 cm, une surface intermédiaire (le crâne) d'un rayon de 9.2 cm, et une surface extérieure (le cuir chevelu) d'un rayon de 10.0 cm (voir figure A.5.1). Une conductivité unitaire a été associée aux régions représentant le cerveau et le cuir chevelu, tandis qu'au crâne a été attribuée une conductivité de $1/80$, en accord avec le modèle de Ary et al. (1981). Un modèle sphérique a été choisi pour que les potentiels de surface puissent être comparés avec ceux résultant d'une expression analytique (voir annexe A.5) et que la précision du problème direct pour nos différentes méthodes numériques soit examinée.

Les surfaces sphériques ont été divisées en triangles plans par lignes de longitude et de latitude. Le choix de triangles plans nous permet la comparaison de plusieurs méthodes sur un même modèle discret et la division en lignes de longitude et de latitude nous permet d'augmenter facilement le nombre d'éléments de discrétisation. Les simulations ont été effectuées sur cinq modèles du type trois sphères concentriques à 200, 400, 600, 800, et 1000 triangles par surface, respectivement (voir figure 4.1). Un dipôle

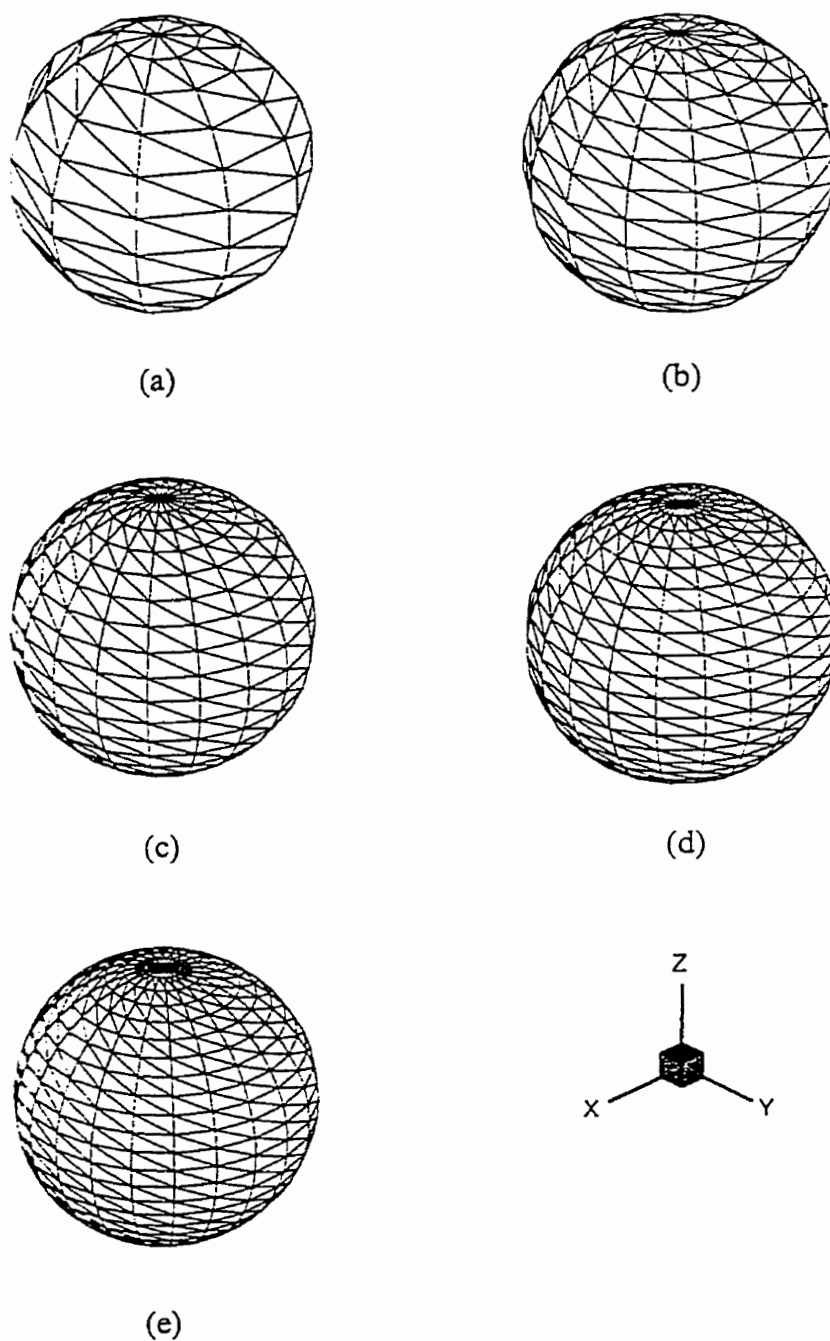


Figure 4.1. Cinq ordres de discrétisation : (a) 200 triangles par surface, (b) 400 triangles par surface, (c) 600 triangles par surface, (d) 800 triangles par surface, et (e) 1000 triangles par surface.

radial ou tangentiel d'amplitude unitaire a été placé successivement à différentes excentricités le long des axes z et x . Notons que la discrétisation est plus fine près des pôles nord et sud. La comparaison entre les résultats pour un dipôle excentrique sur les axes x et z , respectivement, permettra d'étudier l'effet d'une augmentation locale du nombre d'éléments près d'un dipôle sans varier le nombre total de triangles.

4.2 Méthode conventionnelle pour la résolution du problème direct

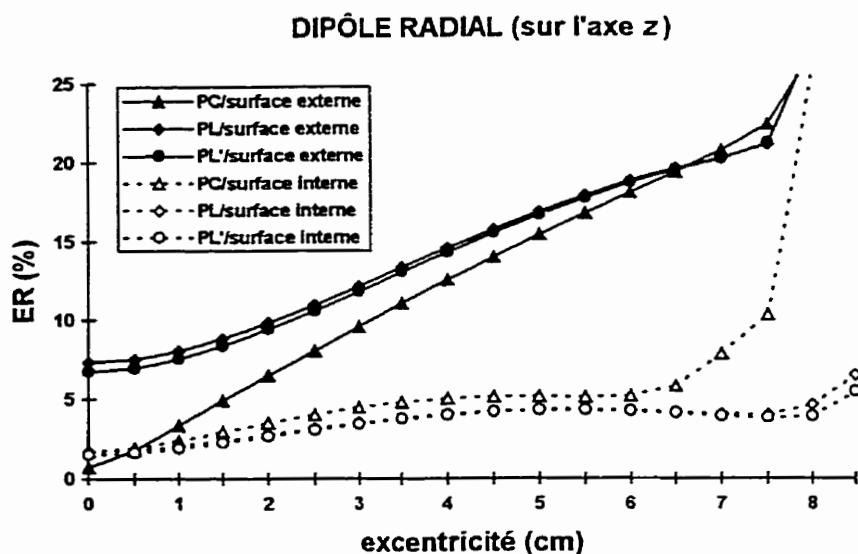
Dans cette section, les résultats du problème direct pour trois méthodes différentes du chapitre 2 sont présentés : la méthode du potentiel constant aux centroïdes de triangles plans avec l'équation (2.18) pour l'angle solide (PC), la méthode du potentiel linéaire aux sommets de triangles plans avec l'équation (2.23) pour l'angle solide (PL), et la méthode PL avec la modification de Heller (1990) pour l'angle solide (PL'). Avec une conductivité crânienne aussi faible, l'approche du problème isolé est indispensable pour toutes ces méthodes. Les erreurs numériques dues à l'utilisation des éléments de frontières ne sont pas complètement éliminées par l'approche du problème isolé, mais celles-ci sont en grande partie réduites.

La précision des différentes méthodes conventionnelles est étudiée en calculant l'erreur relative (ER) sur chaque surface S_j indépendamment, soit

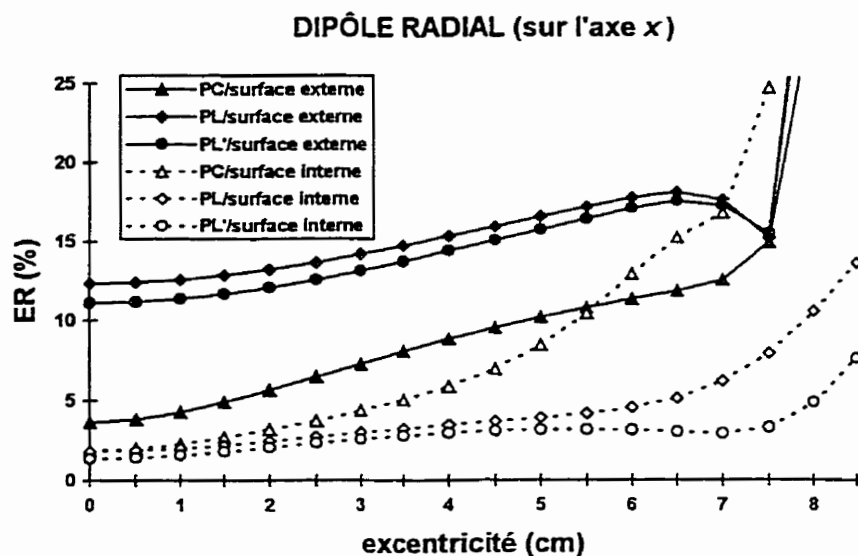
$$ER = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N_s} (\Phi_n^a - \Phi_n)^2}{\sum_{n=1}^{N_s} (\Phi_n^a)^2}} \times 100\%,$$

où Φ_n est le potentiel numérique résultant des simulations et Φ_n^a le potentiel analytique (voir annexe A.5) au point n de la surface S_s et N_s est le nombre de points discrets sur cette surface. Dans le cas de la méthode du potentiel constant, le potentiel analytique au centroïde du triangle est calculé en prenant le tiers de la somme des potentiels aux trois sommets de ce triangle (voir section 4.4).

Les figures 4.2 et 4.3 montrent l'erreur relative de la distribution de potentiel sur la surface externe S_1 et interne S_3 pour un modèle à trois sphères concentriques à 1000 triangles chacune, soit 3000 triangles en tout (l'erreur relative associée à la surface intermédiaire est très semblable à celle de la surface externe). En général, l'erreur relative est plus grande pour un dipôle radial (voir figure 4.2) que pour un dipôle tangentiel (voir figure 4.3) et elle augmente quand le dipôle s'approche de la surface (sa variation est plus prononcée dans le cas d'un dipôle radial). Notons que la distinction entre dipôles radiaux et tangentiels disparaît au fur et à mesure que le dipôle s'approche du centre du conducteur sphérique. À cause de la faible conductivité entre les surfaces S_2 et S_3 , on trouve une ER plus élevée sur la surface externe que la surface interne, à l'exception de la méthode du potentiel constant pour un dipôle excentrique. L'erreur plus élevée sur la surface interne dans ce cas est sans doute due à la supposition que le potentiel est

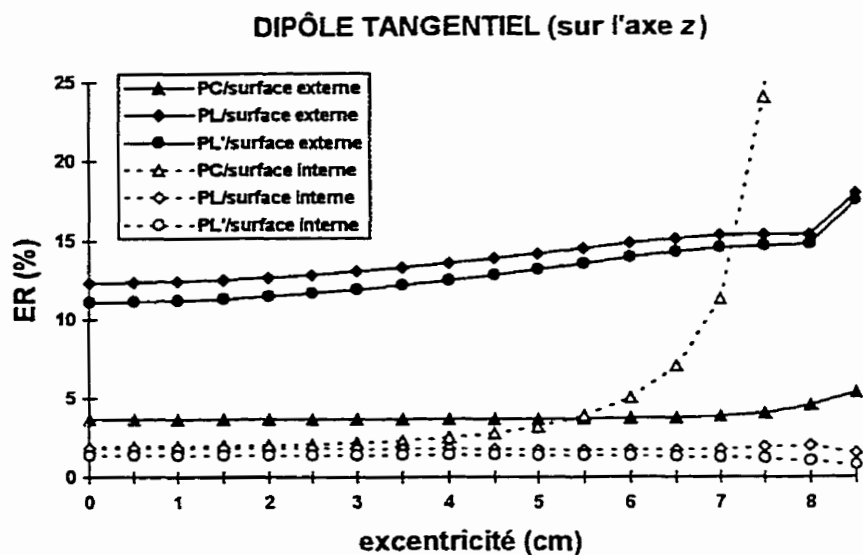


(a)

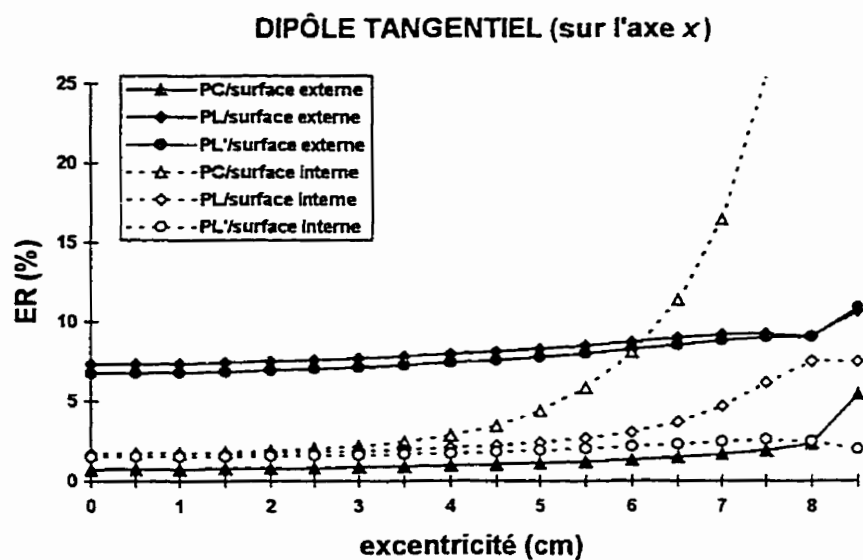


(b)

Figure 4.2. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL, et PL'. Erreur relative (ER) sur les surfaces externe et interne du modèle à 3000 éléments par rapport à l'excentricité d'un dipôle radial sur (a) l'axe z, et (b) l'axe x.



(a)



(b)

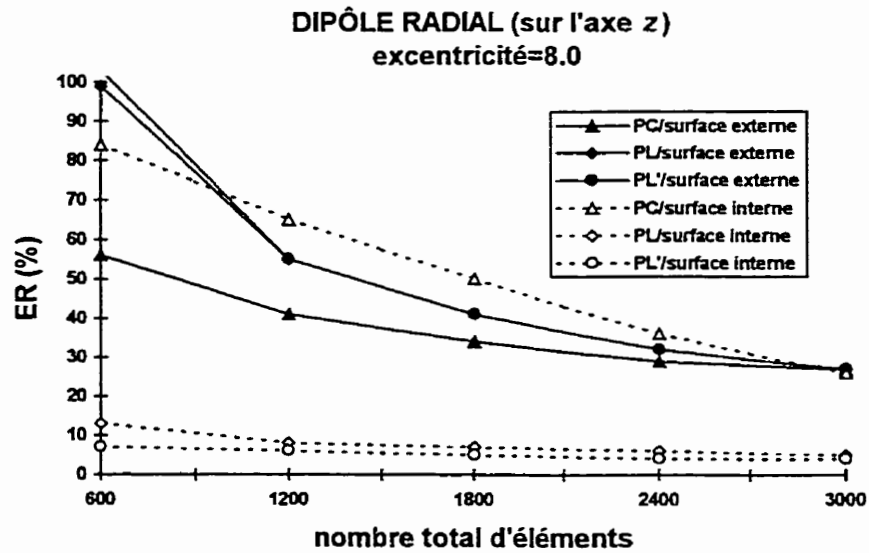
Figure 4.3. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL, et PL'. Erreur relative (ER) sur les surfaces externe et interne du modèle à 3000 éléments par rapport à l'excentricité d'un dipôle tangentiel sur (a) l'axe z, et (b) l'axe x.

constant sur les éléments. En effet, les méthodes du potentiel linéaire sont plus précises sur la surface interne, en particulier pour un dipôle excentrique, alors que la méthode PC donne de meilleurs résultats sur la surface externe. Cette différence de précision sur la surface externe entre les deux types de méthodes est surtout marquée pour un dipôle tangentiel. Les deux variantes de la méthode du potentiel linéaire (PL et PL') donnent des résultats presque identiques. Là où elles se distinguent le plus, c'est sur la surface interne dans le cas d'un dipôle excentrique selon x , l'axe où la discrétisation est la moins fine.

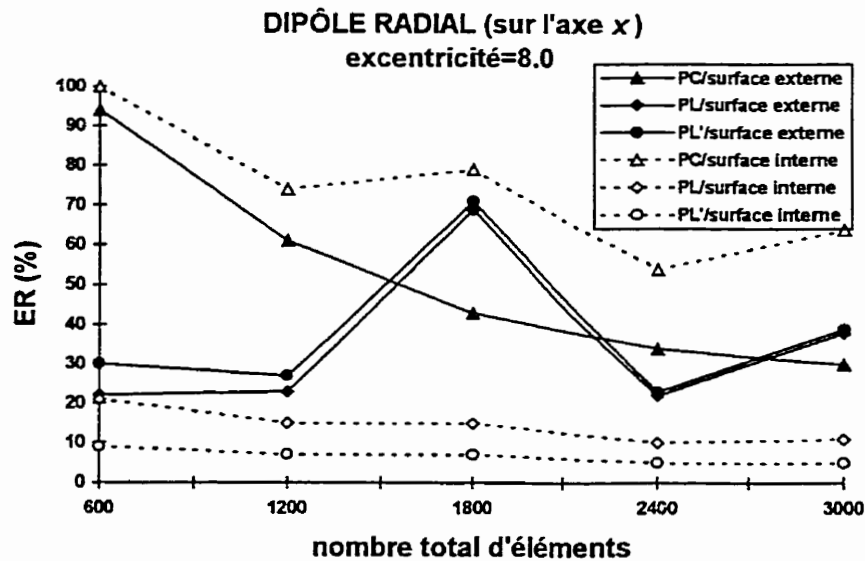
L'erreur est d'autant plus sensible à la discrétisation d'une surface que la variation locale du potentiel est élevée. L'augmentation de la densité d'éléments aux pôles améliore alors les résultats pour un dipôle orienté vers ces zones de raffinement. Pour un dipôle tangentiel, cette amélioration est toujours vraie pour la surface externe (voir figure 4.3), car un dipôle tangentiel sur l'axe x (orienté selon z) qui se situe toujours sous la zone de raffinement de cette surface donne de meilleurs résultats qu'un dipôle tangentiel sur l'axe z (orienté selon x). Par le même argument, l'erreur relative devrait toujours être plus faible pour un dipôle radial sur l'axe z que pour un dipôle radial sur l'axe x . Ceci n'est pas vrai pour des excentricités intermédiaires sur la surface externe du modèle à 3000 éléments (voir figure 4.2b), peut être dû au fait que l'erreur relative (ER) est biaisé en défaveur pour les dipôles radiaux sur l'axe z (voir section 4.4). Notons également, dans ce cas, le comportement irrégulier de l'erreur pour les méthodes du potentiel linéaire.

Les figures 4.4 et 4.5 comparent les mêmes trois méthodes pour différents ordres de discrétisation à une excentricité dipolaire de 8.0 cm à laquelle l'erreur relative est particulièrement grande. Comme on l'a déjà mentionné, la distribution de potentiel sur les surfaces du volume conducteur dépend étroitement de la manière dont ces surfaces sont discrétisées. Un plus grand nombre de triangles augmente la précision des résultats, même si cette augmentation de précision diminue graduellement. Notons que la différence entre les méthodes PL et PL' devient rapidement négligeable en augmentant le nombre d'éléments, en particulier pour un dipôle sur l'axe z . Cela concorde bien avec les figures précédentes : la variante PL' ne semble améliorer la méthode du potentiel linéaire (PL) que quand la discrétisation est relativement faible et le dipôle est excentrique.

Avec les méthodes linéaires, l'erreur pour un dipôle excentrique et radial sur l'axe x a un comportement très irrégulier quand le nombre d'éléments varie. Cela rappelle l'irrégularité notée dans la figure 4.2b pour les mêmes méthodes à une excentricité semblable et est sans doute relié à la discrétisation plutôt grossière de l'axe x . D'ailleurs, cet effet, bien qu'il soit moins marqué, est aussi observable pour un dipôle radial avec la méthode PC (sur la surface interne) ou encore pour un dipôle tangentiel avec les méthodes PL et PL' (sur la surface externe). Il est probable que cette irrégularité est liée au manque de précision de nos modèles numériques et va disparaître complètement en augmentant davantage le nombre d'éléments, étant donné qu'elle n'est pas présente pour un dipôle moins excentrique ou pour un dipôle sur l'axe z où la discrétisation est plus fine. Néanmoins, pour toutes les méthodes et selon les deux axes, l'erreur relative sur la

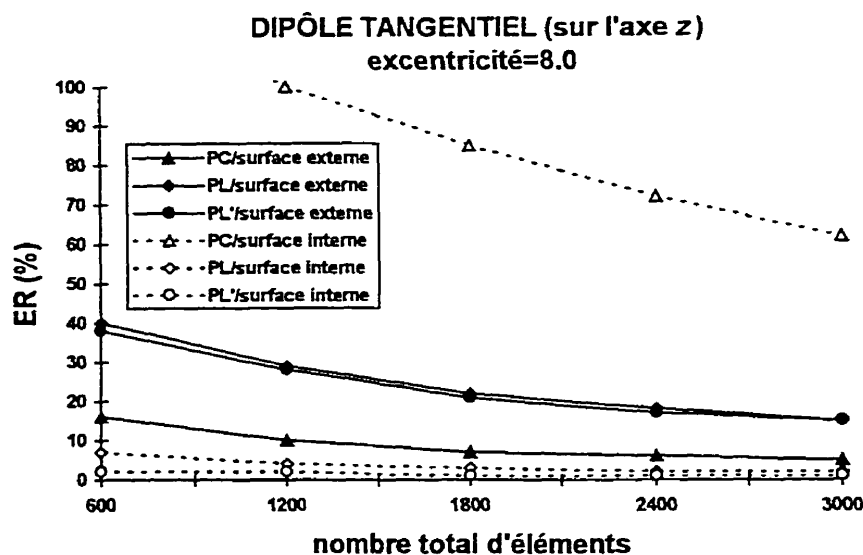


(a)

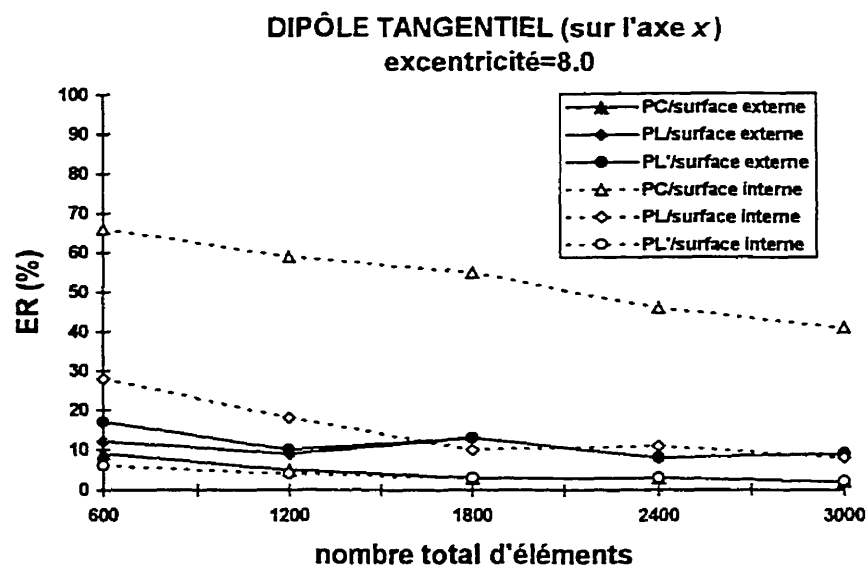


(b)

Figure 4.4. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL, et PL'. Erreur relative (ER) sur les surfaces externe et interne d'un modèle à 600, 1200, 1800, 2400, et 3000 éléments pour un dipôle radial sur (a) l'axe z, et (b) l'axe x à une excentricité de 8.0 cm.



(a)



(b)

Figure 4.5. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL, et PL'. Erreur relative (ER) sur les surfaces externe et interne d'un modèle à 600, 1200, 1800, 2400, et 3000 éléments pour un dipôle tangentiel sur (a) l'axe z, et (b) l'axe x à une excentricité de 8.0 cm.

surface externe associée à un dipôle radial excentrique reste très élevée, même dans le cas d'un modèle à 3000 éléments (de l'ordre de 30%). Ceci nous indique clairement la nécessité d'augmenter la discrétisation de nos surfaces pour tenir compte d'une excentricité dipolaire de 8 cm ou plus.

4.3 Méthode réciproque pour la résolution du problème direct

La méthode conventionnelle pour la résolution du problème direct est comparée à la méthode réciproque. À cette fin, on considère encore une fois la méthode du potentiel constant aux centroïdes de triangles plans avec l'équation (2.18) pour l'angle solide (PC). Une telle méthode employée pour l'approche réciproque sera notée RPC. La méthode du potentiel linéaire aux sommets de triangles plans avec l'équation (2.23) pour l'angle solide (PL), une fois employée à l'approche réciproque, est notée RPL. La modification de Heller (1990) pour l'angle solide améliore peu la méthode PL et elle n'est donc pas considérée dans cette section. La méthode réciproque nous donne une différence de potentiel entre deux électrodes sur la surface externe du volume conducteur. Comme on l'a mentionné au chapitre 3, l'insertion de quadrilatères curvilignes aux sites de ces électrodes pourrait améliorer davantage les résultats de la méthode du potentiel linéaire, notamment pour un dipôle radial excentrique. La méthode du potentiel linéaire résultant de ce nouveau modèle sera noté RPLq. Pour réduire au maximum l'approximation

introduite par l'utilisation de l'intégration numérique pour certaines des intégrales du chapitre 3, un grand nombre de points d'intégration est utilisé (13 pour les triangles et 144 pour les quadrilatères (voir annexes A.3 et A.4)). Comparées à cette intégration numérique, les expressions analytiques (équations (2.18) et (2.23)) pour l'angle solide n'augmentent que légèrement la précision des résultats (voir section 4.4).

Comme on l'a vu dans la section précédente, l'erreur est particulièrement élevée aux sites sur une surface où le gradient du potentiel est grand. Donc, plutôt que de calculer de façon exhaustive le potentiel à chaque point de cette surface, on ne prend en compte que les quatre paires d'électrodes présentées dans la figure 4.6. Les paires d'électrodes choisies sur les axes z et x nous permettent d'étudier l'erreur maximale pour un dipôle radial sur ces deux axes, respectivement. Les autres paires permettent de suivre cette erreur pour un dipôle tangentiel à différentes excentricités. Huit quadrilatères ont été placés à, et directement en-dessous, ces sites d'électrodes sur chacune des trois surfaces pour la méthode RPLq (voir figure 4.7). Soit V_i et V_i^a les différences de potentiel numérique et analytique, respectivement, entre la paire d'électrodes i . On calcule l'écart d'erreur relative (EER) défini comme

$$\text{EER} = \frac{V_i^a - V_i}{V_{\max}^a - V_{\min}^a} \times 100\%,$$

où V_{\max}^a et V_{\min}^a sont les valeurs maximale et minimale de la différence de potentiel analytique parmi les quatre paires d'électrodes pour un dipôle donné. L'écart d'erreur

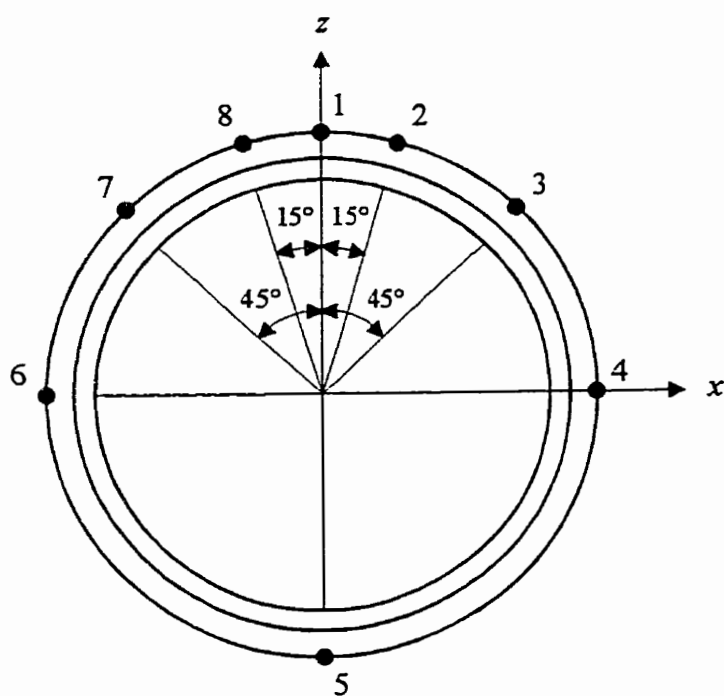


Figure 4.6. Schéma montrant les différentes positions d'électrode considérées. On s'intéresse à 4 paires d'électrodes : 1 et 5, 2 et 8, 3 et 7, et 4 et 6.

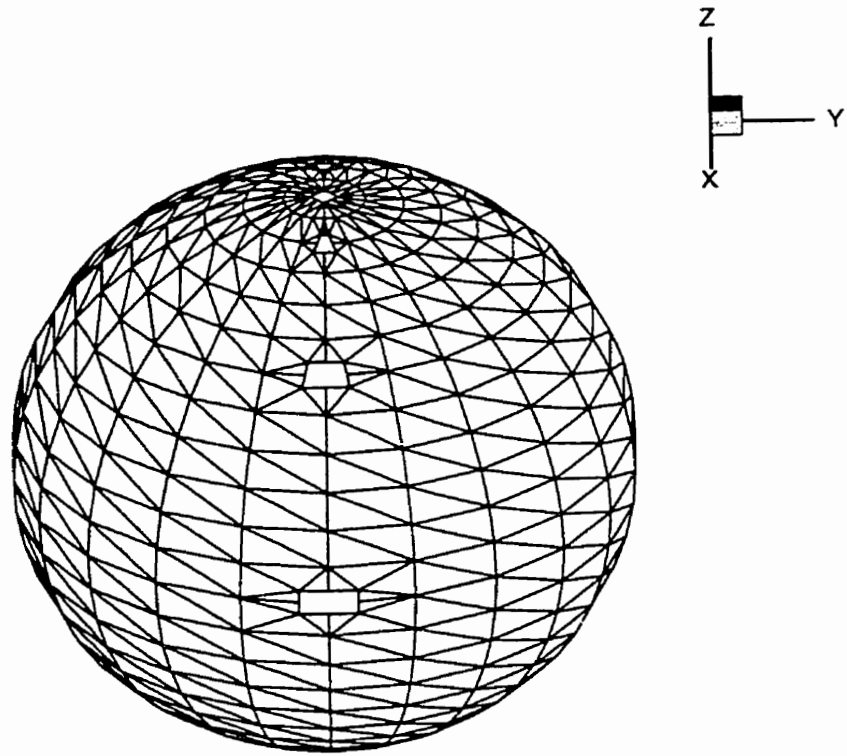


Figure 4.7. Insertion de quadrilatères curvilignes aux sites d'injection de courant sur un modèle à 3000 éléments.

relative pour une paire d'électrodes est donc un pourcentage de l'écart des différences de potentiels pour toutes les paires d'électrodes.

Les figures 4.8 et 4.9 montrent l'écart d'erreur relative maximal des paires d'électrodes considérées pour un modèle à trois sphères concentriques à 3000 éléments. Notons tout d'abord que la forme des courbes présentées ici pour les méthodes conventionnelles est semblable à celles des figures 4.2 et 4.3 pour la surface externe. Les commentaires de la section précédente pour la surface externe S_1 sont donc encore valables : la méthode conventionnelle du potentiel constant (PC) est plus précise que la méthode conventionnelle du potentiel linéaire (PL), en particulier pour un dipôle tangentiel. L'effet de l'augmentation de la densité d'éléments le long de l'axe z reste aussi le même : une amélioration des résultats pour un dipôle orienté vers les zones de raffinement. Encore une fois, la seule exception à cette amélioration est le cas d'un dipôle radial à des excentricités intermédiaires, notamment pour la méthode PC. Néanmoins, le calcul du potentiel analytique dans le cas du potentiel constant peut affecter de manière imprévisible le calcul de l'erreur (voir section 4.4). Notons que la comparaison quantitative des résultats pour un dipôle tangentiel sur les deux axes n'est plus très rigoureuse, car les paires d'électrodes montrant les erreurs maximales par rapport à l'axe z et l'axe x ne sont pas les mêmes. Notons aussi, une fois de plus, la chute de l'erreur pour un dipôle radial à une excentricité de 7.5 cm dans le cas de la méthode PL.

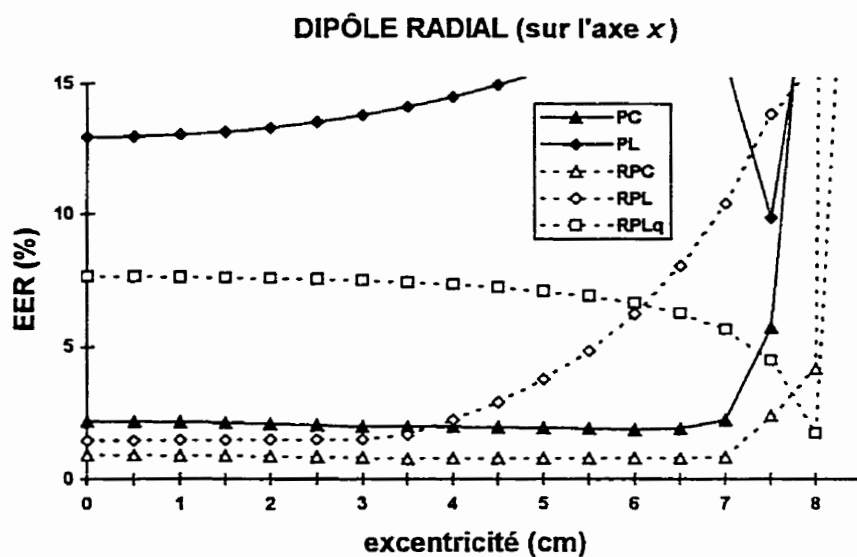
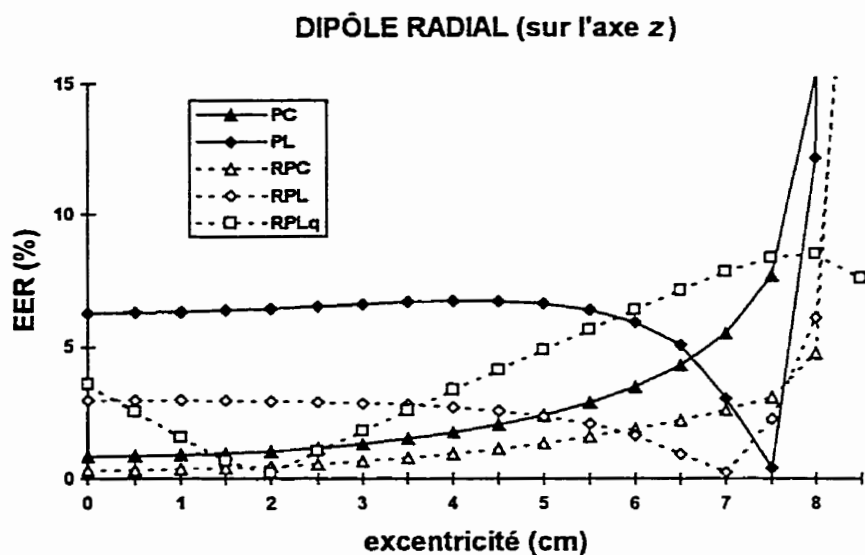
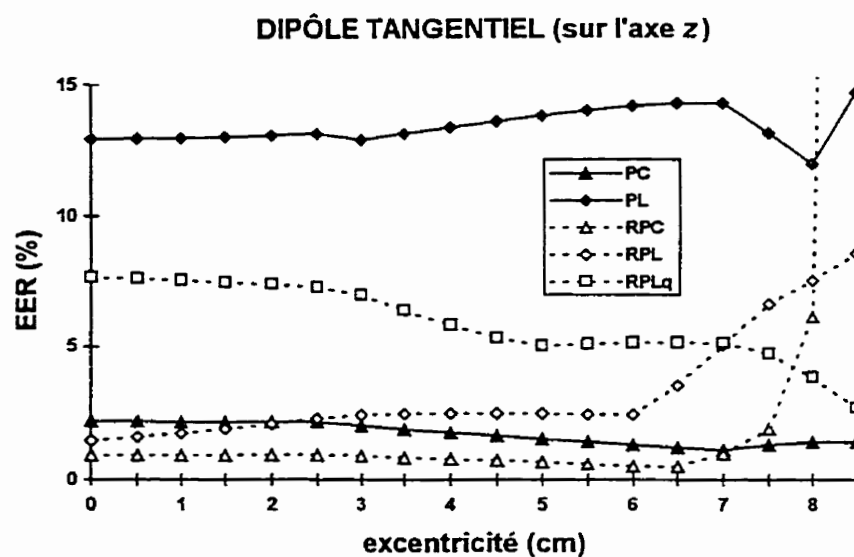
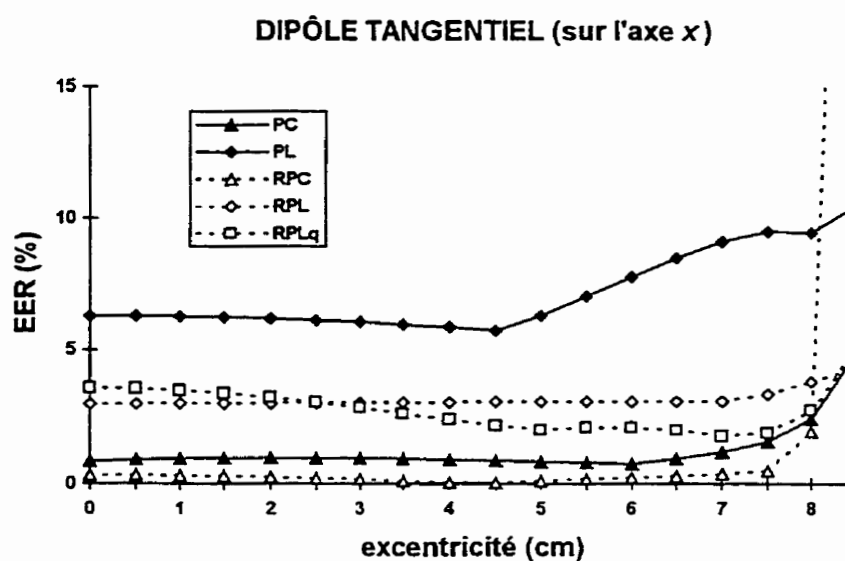


Figure 4.8. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et réciproques RPC, RPL, et RPLq. Écart d'erreur relative (EER) maximal sur le modèle à 3000 éléments par rapport à l'excentricité d'un dipôle radial sur (a) l'axe z, et (b) l'axe x.



(a)

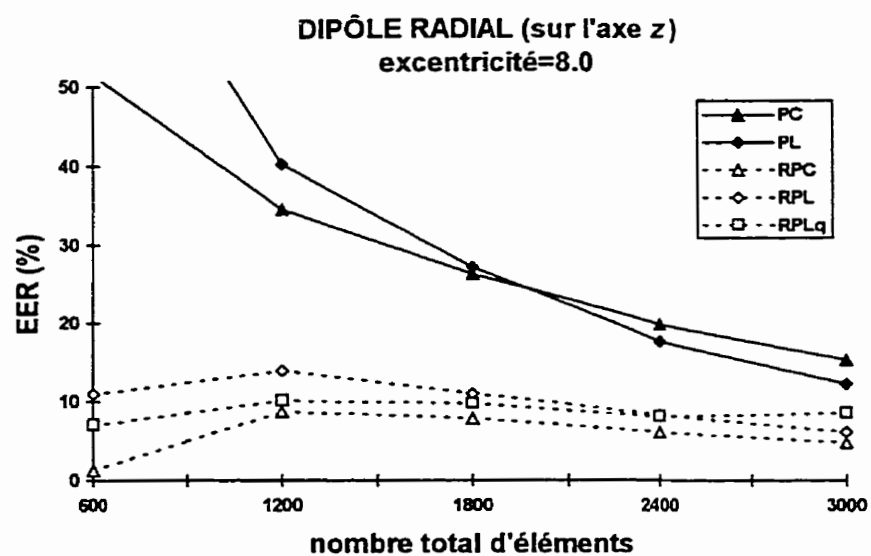


(b)

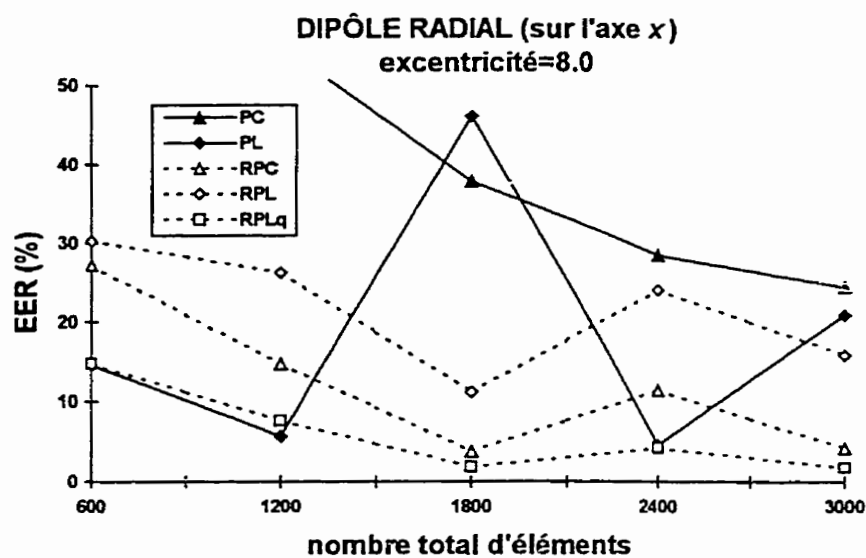
Figure 4.9. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et réciproques RPC, RPL, et RPLq. Écart d'erreur relative (EER) maximal sur le modèle à 3000 éléments par rapport à l'excentricité d'un dipôle tangentiel sur (a) l'axe z, et (b) l'axe x.

Globalement, la méthode réciproque améliore les résultats pour un potentiel constant ou linéaire, respectivement. Cependant, l'erreur résultante de la méthode RPC pour un dipôle tangentiel et excentrique est beaucoup plus élevée que pour la méthode PC (voir figure 4.9). Même avec la meilleure précision des méthodes RPL et RPLq, on retrouve, encore une fois, des irrégularités associées à la méthode du potentiel linéaire. Pour la méthode utilisant les quadrilatères, on peut constater une erreur relativement grande pour certains dipôles de faible excentricité (figure 4.8b). En effet, cette méthode est assez sensible à la taille des quadrilatères, en particulier les quadrilatères plutôt larges sur l'axe x . En général, la méthode PC reste la plus précise à l'exception d'un cas très important : un dipôle radial, d'excentricité de 8.5 cm sur l'axe z . La méthode RPLq est la seule qui nous donne une erreur si faible pour un dipôle aussi près des surfaces (de l'ordre de 12%). Cela résulte, en partie, du raffinement de la discrétisation aux pôles car l'erreur est bien plus élevée pour un dipôle radial sur l'axe x à la même excentricité. Néanmoins, ces résultats indiquent que, pour des dipôles très excentriques, une combinaison de la méthode RPLq avec une discrétisation locale très fine est souhaitable.

Les figures 4.10 et 4.11 sont semblables aux figures 4.4 et 4.5 de la section précédente. On y retrouve d'ailleurs les irrégularités observées à l'excentricité de 8.0 cm, en particulier avec les méthodes PL et RPL pour un dipôle sur l'axe x . Cependant, la variante aux quadrilatères (RPLq) montre un comportement beaucoup plus régulier malgré le fait qu'elle utilise aussi un potentiel linéaire. Cela confirme bien que ce comportement irrégulier est directement lié à la discrétisation de nos sphères. En

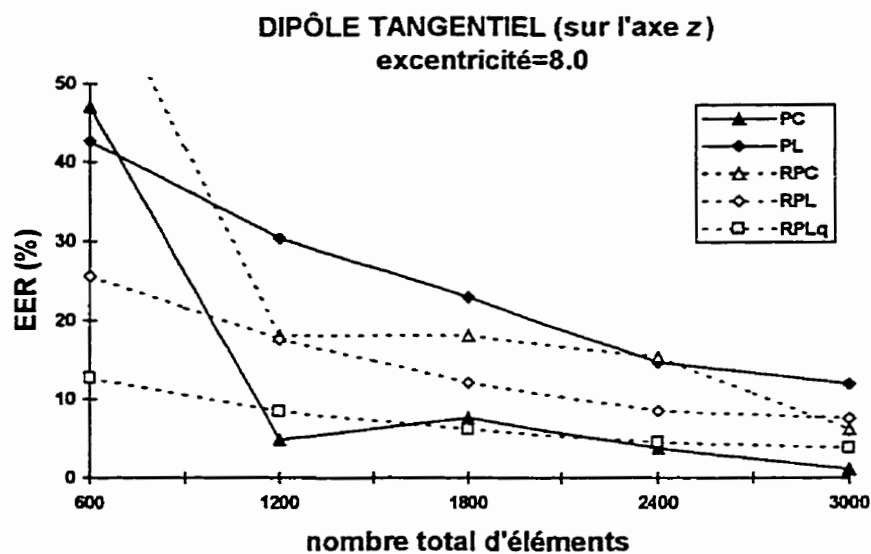


(a)

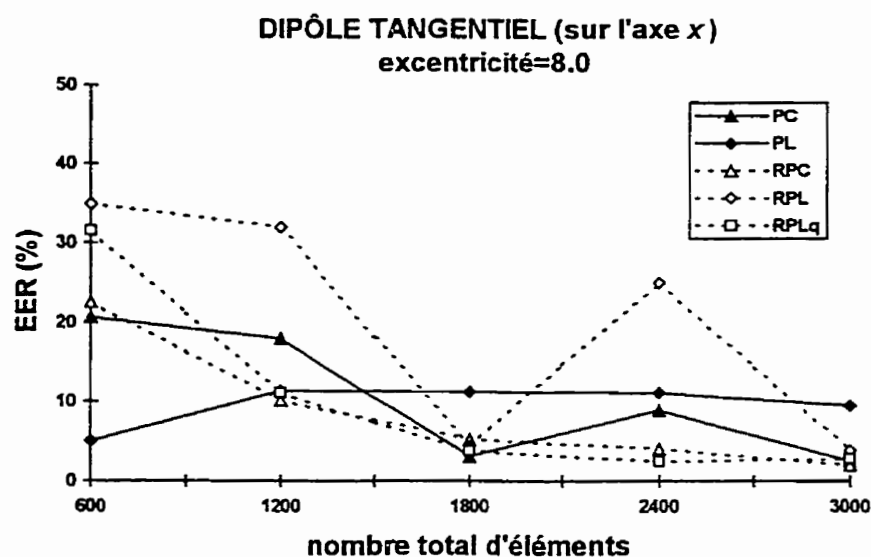


(b)

Figure 4.10. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et réciproques RPC, RPL, et RPLq. Écart d'erreur relative (EER) maximal sur le modèle à 600, 1200, 1800, 2400, et 3000 éléments pour un dipôle radial sur (a) l'axe z, et (b) l'axe x à une excentricité de 8.0 cm.



(a)



(b)

Figure 4.11. Comparaison des différentes méthodes conventionnelles PC, PL et réciproques RPC, RPL, et RPLq. Écart d'erreur relative (EER) maximal sur le modèle à 600, 1200, 1800, 2400, et 3000 éléments pour un dipôle tangentiel sur (a) l'axe z, et (b) l'axe x à une excentricité de 8.0 cm.

regardant alors surtout l'axe z , la méthode réciproque améliore presque tous les résultats pour un potentiel linéaire, tandis qu'elle n'améliore que ceux d'un dipôle radial pour un potentiel constant. La plus grande différence entre la méthode conventionnelle et réciproque semble être pour un dipôle radial sur l'axe z , où la méthode réciproque maintient un EER faible quel que soit le nombre d'éléments. En général, pour un dipôle d'excentricité de 8.0 cm, la méthode RPLq donne les meilleurs résultats.

4.4 Discussion

Notre hypothèse n'est pas que le modèle à trois sphères concentriques est une représentation réaliste de la tête humaine, mais plutôt que c'est la meilleure représentation possible qui permette le calcul de la précision du problème direct et la comparaison de toutes les méthodes présentées dans ce travail. Avec un modèle à quatre sphères concentriques (où l'on considère la région contenant le liquide cérébro-spinal entre le cerveau et le crâne), l'approche du problème isolé n'est possible qu'avec un potentiel supposé constant (voir chapitre 2). De plus, même si la discrétisation choisie n'est pas exactement irrégulière, elle contient quand même une certaine variabilité de taille et de forme des triangles. Des triangles équilatéraux - qui semblent améliorer la précision des résultats (Ferguson et Stroink, 1997) - pourraient favoriser davantage certaines méthodes (comme la méthode du potentiel linéaire avec la modification de Meijs

et al. (1989)), et la création d'un modèle plus réaliste uniquement à partir de ce type de triangle est rarement possible.

Pour ce genre de modèle, comme pour un modèle plus réaliste, la faible conductivité du crâne devient le facteur critique. C'est pour cette raison que les résultats des sections précédentes diffèrent de ceux présentés par Ferguson et Stroink (1997) pour une sphère homogène et des méthodes semblables. Ils ont constaté que les modifications de Heller (1990) et Meijs (1989) pour l'angle solide augmentaient la précision de la méthode du potentiel linéaire pour une sphère homogène, mais l'utilisation de l'approche du problème isolé semblent rendre cette amélioration moins importante. Notamment pour Heller, la seule amélioration constatée a été pour une discrétisation très faible et un dipôle très excentrique. De plus, ces modifications détériorent les résultats dans le cas d'un modèle de type non sphérique pour lequel elles ne sont pas adaptées (Ferguson et Stroink, 1997).

Pour une discrétisation donnée, la méthode conventionnelle du potentiel constant donne une erreur plus faible que celle du potentiel linéaire sur la surface externe du volume conducteur, et plus grande sur la surface interne. En effet, le choix d'un potentiel supposé constant sur les triangles, plutôt que linéaire, semble exclusivement affecter les résultats pour un dipôle excentrique sur la surface interne. Cependant, la méthode du potentiel constant nécessite environ deux fois plus de points discrets que la méthode du potentiel linéaire (voir chapitre 2), ce qui affecte le temps de calcul. Considérons le nombre de points discrets plutôt que le nombre d'éléments pour un dipôle sur l'axe z

pour lequel l'erreur relative a une certaine régularité. On compare 600 et 1200 éléments pour la méthode PC à 1200 et 2400 éléments pour la méthode PL, respectivement, dans les figures 4.4a et 4.5a. La méthode du potentiel linéaire donne des résultats sur la surface externe identiques à la méthode du potentiel constant pour un dipôle radial et toujours moins bons pour un dipôle tangentiel. Ces résultats sont soutenus par Schlitt et al. (1995) pour un modèle à trois sphères concentriques, discrétisées en triangle équilatéraux et ce malgré l'utilisation de la variante de Meijs qui est favorisée par cette discrétisation. Il faut noter que, pour le problème inverse, on ne s'intéresse qu'aux potentiels aux sites d'électrodes, donc sur la surface externe où la méthode du potentiel constant est clairement meilleure.

Pour cette méthode du potentiel constant, le potentiel analytique au centroïde du triangle est calculé en prenant le tiers de la somme des potentiels aux trois sommets de ce triangle. Il est évident que ce centroïde se trouve à l'intérieur de la sphère et le potentiel analytique sera alors sous-estimé par rapport à notre calcul numérique. Dans ce cas, l'erreur contient donc un facteur qui est indépendant de la méthode du potentiel constant et qui n'est pas présent pour les autres méthodes. Cette erreur supplémentaire disparaîtra de plus en plus en augmentant le nombre d'éléments. Ferguson et Stroink (1997) ont suggéré que le volume qu'on cherche à discrétiser devrait être inscrit à l'intérieur de la surface numérique pour donner de meilleurs résultats. Mais en général, ce serait très difficile car ces surfaces sont discrétisées à partir des sommets des triangles. De toute

manière, il est évident qu'un volume inscrit favoriserait surtout la méthode PC et on a déjà établi qu'elle était plus précise sur la surface qui nous intéresse.

On a aussi étudié à quel point un raffinement local de la discrétisation nous permet de réduire l'erreur, en particulier pour un dipôle superficiel. Ceci semblerait être effectivement le cas, mais il faut tout de même noter certaines incohérences dans cette amélioration par rapport à l'erreur relative (ER). Cette erreur est calculée à partir de tous les points d'une surface. Comme on l'a déjà mentionné, l'erreur est d'autant plus élevée que le gradient du potentiel est grand. Quand un dipôle est orienté vers une région d'une surface, plus nombreux seront les éléments il y aura sur cette région, plus grand sera le nombre de points ayant un gradient élevé et donc une erreur élevée. Ce raisonnement s'applique aussi à un faible gradient de potentiel. Donc, pour un dipôle radial sur l'axe z (où le raffinement est plus poussé), il y aura beaucoup de points avec une grande erreur et peu de points, autour de l'axe x (où le raffinement est moins poussé), avec une petite erreur. Le contraire est vrai pour un dipôle radial sur l'axe x . Il est évident que cela pourrait biaiser l'ER en faveur de l'axe x , ce que l'on peut constater pour des excentricités intermédiaires dans la section 4.2. On pourrait éliminer ce biais en choisissant un certain nombre de sites comme, par exemple, les sites d'électrodes (voir figure 1.3) et en ne calculant l'erreur qu'à ces points, ce qui refléterait d'avantage le problème inverse (voir chapitre 5).

Il est difficile de comparer nos résultats pour la méthode réciproque avec ceux de Fletcher et al. (1995), car nos choix de discrétisation et nos sites d'électrodes diffèrent

énormément. Mais, en considérant surtout la méthode conventionnelle du potentiel constant et la méthode réciproque du potentiel linéaire avec des quadrilatères aux sites d'injection de courant (les plus précises), on arrive aux mêmes conclusions pour la surface externe. La méthode réciproque est plus exacte que la méthode conventionnelle pour un dipôle superficiel, mais moins pour un dipôle près du centre du conducteur sphérique. Dans le cadre du problème inverse, il est important que l'erreur reste assez constante pour un dipôle à différentes excentricités. C'est davantage le cas pour la méthode RPLq, qui maintient une erreur relativement faible, même pour un dipôle radial d'excentricité très élevée. Comme on l'a mentionné dans la section précédente, cette erreur plutôt faible résulte également du raffinement de la discrétisation aux pôles de nos sphères. Cependant, avec la méthode réciproque on connaît les sites qu'on doit raffiner : ce sont les sites d'électrodes d'injection de courant. Par contre, avec la méthode conventionnelle pour un dipôle quelconque, les surfaces devraient être raffinée partout. En plus, la meilleure configuration d'éléments pour ce raffinement (taille des quadrilatères, proportion des triangles) n'a pas été étudiée dans ce travail, mais la méthode réciproque y semble assez sensible.

On a mentionné qu'avec une intégration numérique aussi précise que celle utilisée dans ce chapitre, les expressions analytiques pour l'angle solide apportent peu à la précision globale de la méthode réciproque. En pratique, on essaye normalement de limiter le plus possible le nombre de points d'intégration pour réduire le temps de calcul. Dans ce cas, les expressions analytiques pourraient réduire davantage l'erreur de ces

méthodes. Finalement, il existe une expression analytique pour un potentiel quadratique sur un triangle (de Munck, 1992), mais cette approche nécessite davantage de points (les points à mi-chemin des sommets des triangles, sur leurs côtés). L'interpolation quadratique est surtout intéressante pour un nombre restreint d'éléments, notamment, comme avec l'interpolation linéaire, pour la surface interne. Donc, pour un nombre adéquat de triangles et dans le cadre d'une résolution éventuelle du problème inverse, l'approche quadratique n'augmentera sans doute pas la précision de nos résultats. Cependant, dans ce travail, on s'intéresse surtout à la précision du problème direct et alors cette approche n'a pas été poursuivie.

CHAPITRE 5 CONCLUSION

La méthode conventionnelle, présentée au chapitre 2, et la méthode réciproque, présentée au chapitre 3, ont été testées sur un modèle à trois sphères concentriques. Les résultats de nos simulations sur des modèles allant de 600 à 3000 éléments ont été présentés au chapitre 4. Une source dipolaire dans le cortex a été représentée par un dipôle radial ou tangentiel à excentricité variable (voir chapitre 1). Un modèle sphérique a été choisi pour pouvoir estimer la précision du problème direct, mais la comparaison des différentes méthodes s'est fait dans l'optique d'une utilisation éventuelle d'un modèle plus réaliste de la tête humaine.

La méthode conventionnelle du potentiel linéaire s'est avérée plus précise que celle du potentiel constant sur la surface interne, en particulier pour un dipôle superficiel. Alors que la surface interne est la plus importante pour les calculs du champ magnétique (Schlitt et al., 1995), le problème inverse en électroencéphalographie ne nécessite que les potentiels sur la surface externe du volume conducteur. Sur cette surface, la méthode du potentiel constant est la plus exacte, que l'on considère le nombre d'éléments ou le nombre de points discrets, en particulier pour un dipôle tangentiel. En effet, la supposition que le potentiel est constant plutôt que linéaire sur les éléments semble surtout influencer les potentiels de la surface intérieure. De plus, l'approche du problème isolé, essentielle pour un modèle de conductivité réaliste de la tête humaine, n'est pas

toujours utilisable dans le cas de la méthode du potentiel linéaire (voir chapitre 2). L'avantage le plus important du potentiel linéaire, que ce soit la méthode conventionnelle ou la méthode réciproque, reste qu'il est plus facile à faire correspondre des sommets de triangles à des sites d'électrodes plutôt que des centroïdes, car les surfaces sont normalement discrétisées à partir de ces sommets. La modification de Heller (1990) pour l'angle solide ne semble pas améliorer les résultats de la méthode du potentiel linéaire pour une discrétisation adéquate.

La méthode réciproque la plus précise est pour un potentiel linéaire avec des quadrilatères curvilignes à interpolation quadratique placés aux sites d'électrodes d'injection de courant. Notons qu'avec cette approche, au contraire de la méthode conventionnelle, on peut raffiner certaines régions des surfaces considérées, sans connaître le dipôle en question. Les sites d'électrodes d'injection de courant sont connues : ce sont les sites d'électrodes de mesures (voir chapitre 3). L'application du théorème de réciprocité a pour effet de décaler les emplacements des dipôles aux emplacements d'électrodes sur la surface externe du volume conducteur. Tandis que la méthode conventionnelle du potentiel constant reste plus précise (sur la surface externe) pour un dipôle près du centre du conducteur, la méthode réciproque est plus exacte pour un dipôle superficiel. En plus, l'erreur de la méthode réciproque varie beaucoup moins que celle de la méthode conventionnelle pour différentes excentricités dipolaire, une caractéristique très importante pour le problème inverse.

L'approche du problème réciproque donne une expression analytique décrivant la dépendance des potentiels de surface aux paramètres dipolaires. Il est donc possible de trouver les dérivées de ces expressions, ce qui permet l'utilisation de techniques d'optimisation comme celle de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963) pour la résolution du problème inverse. Ces techniques ont tendance à converger bien plus rapidement que celle du simplexe (Nelder et Mead, 1965; O'Neil, 1971), qui est le type d'optimisation nécessaire à la méthode conventionnelle pour un modèle plus réaliste de la tête humaine incorporant un très grand nombre d'éléments. Cet avantage, ainsi que l'erreur relativement stable de la méthode réciproque, promet de donner une solution particulièrement bonne au problème inverse. Cependant, la comparaison des différentes méthodes pour ce problème est un travail qui reste à faire.

Éventuellement, un modèle plus réaliste de la tête peut être formé à partir d'images de résonance magnétique (MRI) dans le cas du cerveau et du cuir chevelu, et à partir d'images tomographiques (CT) pour le crâne. Un tel modèle nécessitera sans doute un plus grand nombre d'éléments que ceux présentés dans ce travail. Dans ce cas, la précision des différentes méthodes ne pourra être comparée qu'à suite de la résolution du problème inverse, car une solution analytique au problème direct n'existe pas. La validation numérique des méthodes sur ce genre de problème amènera peut être à une application clinique éventuelle. Une première étape serait la localisation d'une électrode stimulante implantée dans le cerveau, ou la localisation de sources neurales connues. Le

but à long terme serait la localisation de sites épileptiformes dans la planification d'une intervention chirurgicale pour des patients épileptiques.

RÉFÉRENCES

ARTHUR, R.M. et GESELOWITZ, D.B. (1970). Effect of inhomogeneities on the apparent location and magnitude of a cardiac current dipole source. IEEE Trans. Biomed. Eng., 17, 141-146.

ARY, J., KLEIN, S. et FENDER, D. (1981). Location of sources of evoked scalp potentiels : corrections for skull and scalp thicknesses. IEEE Trans. Biomed. Eng., 28, 447-452.

BARNARD, A.C.L., DUCK, I.M., LYNN, M.S. et TIMLAKE, W.P. (1967). The application of electromagnetic theory to electrocardiology. II. Numerical solution of the integral equations. Biophys. J., 7, 463-90.

BARR, R.C., PILKINGTON, T.C., BOINEAU, J.P. et SPACH, M.S. (1966). Determining surface potentials from current dipoles with application to electrocardiography. IEEE Trans. Biomed. Eng., 13, 88-92.

BARR, R.C., RAMSEY, M., III et SPACH, M.S. (1977). Relating epicardial to body surface potential distributions by means of transfer coefficients based on geometry measurements. IEEE Trans. Biomed. Eng., 24, 1-11.

BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C. (1984). Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

BREBBIA, C. et DOMINGUEZ, J. (1989). Boundary elements : An introductory course. McGraw-Hill, New York.

DE MUNCK, J.C. (1992). A linear discretization of the volume conductor boundary integral equation using analytically integrated elements. IEEE Trans. Biomed. Eng., 39, 986-990.

FERGUSON, A.S. et STROINK, G. (1997). Factors affecting the accuracy of the boundary element method in the forward problem. Part 1: Calculating surface potentials. IEEE Trans. Biomed. Eng., 44, 1139-1155.

FLETCHER, D.J., AMIR, A., JEWETT, D.L. et FEIN, G. (1995). Improved method for computation of potentials in a realistic head shape model. IEEE Trans. Biomed. Eng., 42, 1094-1104.

GELERNTER, H. et SWIHART, J. (1964). A mathematical physical model of the electrocardiogram. Biophys. J., 4, 285.

GEVINS, A.S. et AMINOFF, M.J. (1988). Electroencephalography : Brain electrical activity. Encyclopedia of Medical Devices and Instrumentation, vol. 2,. Eds. Webster, J.G., New York, 1084-1107.

HAMALAINEN, M.S. et SARVAS, J. (1987). Feasibility of the homogeneous head model in the interpretation of neuromagnetic fields. Phys. Med. Biol., 32, 91-97.

HAMALAINEN, M.S. et SARVAS, J. (1989). Realistic conductivity geometry model of the human head for interpretation of neuromagnetic data. IEEE Trans. Biomed. Eng., 36, 165-171.

HAYAMI, K. et BREBBIA, C.A. (1988). Quadrature methods for singular and nearly-singular integrals in 3-D boundary element method. Proc. X Int. Conf. BEM, BEM X/88, Eds. Brebbia, C.A., 237-264.

HELLER, L. (1990). Computation of the return current in encephalography: The auto solid angle. Digital Image Synthesis and Inverse Optics, Proc. SPIE 1351, Eds. Gmitro, A. F., Idell, P. S., LaHaie, I. J., 376-390.

JACKSON, J.D. (1962). Classical Electrodynamics. John-Wiley & Sons, New York.

KELLOGG, O.D. (1929). Foundations of potential theory. Ungar, New York.

LYNN, M.S. et TIMLAKE, W.P. (1966). The numerical solution of singular integral equations of potential theory. Numer. Math., 11, 77-98.

LYNN, M.S. et TIMLAKE, W.P. (1968). The use of multiple deflations in the numerical solution of singular systems of equations, with applications to potential theory. SIAM J. Numer. Anal., 5, 303-322.

MARQUARDT, D.W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. J. soc. Industr. Appl. Math., 11, 431-441.

MEIJS, J.W.H., PETERS, M.J., VAN OOSTEROM, A. et BOOM, H.B.K. (1987). The application of the Richardson extrapolation in simulation studies of EEG's. Med. Biol. Eng. Comp., 25, 222-226.

MEIJS, J.W.H., WEIER, O.W., PETERS, M.J. et VAN OOSTEROM, A. (1989). On the numerical accuracy of the boundary element method. IEEE Trans. Biomed. Eng., 36, 1038-1049.

NELDER, J.A. et MEAD, R. (1965). A simplex method for function minimisation. J. Comput., 7, 308-313.

NUNEZ, P.L. (1981). Electrical fields of the brain. The neurophysics of EEG, New York: Oxford University Press.

O'NEIL, R. (1971). Function minimisation using a simplex procedure. Appl. Statist., 20, 338-345.

PLONSEY, R. (1969). Bioelectric Phenomena. McGraw-Hill, New York.

PURCELL, C.J., STROINK, G. et HORACEK, B.M. (1988). Effect of torso boundaries on electric potential and magnetic field of a dipole. IEEE Trans. Biomed. Eng., 31, 652-659.

RUSH, S. et DRISCOLL, D.A. (1969). EEG electrode sensitivity - An application of reciprocity. IEEE Trans. Biomed. Eng., 16, 15-22.

SCHLITT, H.A., HELLER, L., AARON, R., BEST, E. et DOUGLAS, M.R. (1995). Evaluation of the boundary element methods for the EEG forward problem: effect of linear interpolation. IEEE Trans. Biomed. Eng., 42, 52-58.

SMYTHE, W.R. (1968). Static and dynamic electricity. 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 53.

SOUCY, B. (1990). Étude des problèmes direct et inverse de l'électrocardiographie à l'aide d'un modèle expérimental coeur-torse. Thèse de maîtrise, École Polytechnique, Montréal, Canada.

VAN OOSTEROM, A. et STRACKEE, J. (1983). The solid angle of a plane triangle. IEEE Trans. Biomed. Eng., 30, 125-126.

ANNEXE A.1

La déflation matricielle

La déflation consiste simplement à trouver une matrice D , dont les valeurs propres sont les mêmes que la matrice A à part les valeurs propres nulles (Lynn et Timlake, 1968). Alors, plutôt que de résoudre l'équation (2.12),

$$A\Phi = G, \quad (\text{A.1.1})$$

on cherche à résoudre l'équation

$$D\Psi = G, \quad (\text{A.1.2})$$

qui est non singulière et peut donc être résolue sans problème. G est le vecteur source proportionnel au potentiel dans un milieu infini de conductivité unitaire dû à un dipôle de courant dans le cerveau. Notons qu'en général, le vecteur solution Ψ n'est pas le potentiel Φ , mais il est possible de choisir la matrice D pour que Φ soit facilement obtenu à partir de Ψ . Soit

$$D = A + ep^T$$

où e est le vecteur unitaire à N dimensions avec N le nombre d'inconnues et le vecteur colonne p (où p^T dénote la transposée du vecteur p) est tel que :

$$e^T p = p^T e = 1.$$

La solution Ψ de l'équation (A.1.2) nous permet d'obtenir une solution particulière Φ de l'équation (A.1.1) qui satisfait la condition :

$$p^T \Phi = 0.$$

Lynn et Timlake (1968) ont pris un vecteur p de dimension N égale à

$$p = (e_1^T / N_1, 0^T, \dots, 0^T)^T,$$

où N_1 est le nombre d'inconnues pour la surface S_1 et les dimensions des vecteurs zéros sont N_2, N_3, \dots, N_M . C'est équivalent à l'approche où la somme des potentiels sur la surface externe S_1 du volume conducteur est zéro. Dans ce cas, $\Phi = \Psi$ pour toutes les surfaces, car celles-ci sont contenues les unes dans les autres.

ANNEXE A.2

Calcul des éléments matricielles pour le potentiel linéaire

De l'équation (2.21), et en notant que le déterminant du triangle Δ_{jkl} ,

$d(\vec{r}_j; \vec{r}_k; \vec{r}_l) = \vec{r}_j \cdot (\vec{r}_k \times \vec{r}_l)$, on a :

$$\Omega_j^*(\Delta_{jkl}; \vec{r}_m) = -\frac{(\vec{r}_k \times \vec{r}_l)}{\vec{r}_j \cdot (\vec{r}_k \times \vec{r}_l)} \cdot \int_{\Delta_{jkl}} \vec{r}' \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{S}'. \quad (\text{A.2.1})$$

Soit $\vec{z}_j = \vec{r}_k \times \vec{r}_l$ avec (j, k, l) une permutation cyclique des vertices d'un triangle Δ_{jkl} dans le sens trigonométrique, vu d'un point à l'extérieur de la surface mais près du triangle. Puisque $\Omega_j^*(\Delta_{jkl}; \vec{r}_m)$, qu'on notera Ω_j^* , ne dépend que de trois différences vectorielles, les équations se simplifient en choisissant le vecteur \vec{r}_m dans l'équation (A.2.1) à l'origine. Notons que \vec{r}' peut être exprimé suivant deux vecteurs orthogonaux (voir figure A.2.1),

$$\vec{r}' = \lambda \vec{n} + \vec{u}', \quad (\text{A.2.2})$$

où \vec{n} est la normale unitaire du triangle Δ_{jkl} vers l'extérieur de la surface, $\lambda = \vec{n} \cdot \vec{r}'$ est la perpendiculaire de l'origine jusqu'au triangle, et \vec{u}' est un vecteur qui est entièrement contenu dans le plan du triangle. Avec ces définitions, le dénominateur de l'équation (2.19) est égal à $2\mu\lambda$, où μ est l'aire du triangle Δ_{jkl} . De (A.2.1) et (A.2.2) on déduit

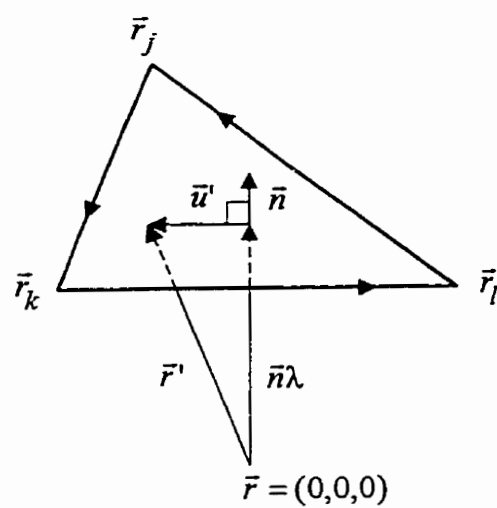


Figure A.2.1. Illustration de l'équation (A.2.2). Notons que \vec{r} est pris à l'origine.

$$\Omega_j^* = \frac{1}{z_j} \int_{\mathcal{F}^j} \frac{2\mu}{|\mathcal{F}^j|^3} dS^j, \quad (\text{A.2.3})$$

car $\nabla^j \left(\frac{1}{|\mathcal{F}^j|} \right) = -\frac{\mathcal{F}^j}{|\mathcal{F}^j|^3}$. Notons que l'angle solide total soutenu par le triangle

$\Omega = \Omega(\Delta_{jkl}; \mathcal{F}^m)$, où \mathcal{F}^m est à l'origine, peut être écrit (Schlitt et al., 1995)

$$\Omega = \lambda \int_{\Delta_{jkl}} \frac{1}{|\mathcal{F}^j|^3} dS^j$$

et, en utilisant (A.2.2) dans (A.2.3), on a :

$$\Omega_j^* = \frac{1}{z_j} \left(z_j \cdot n\Omega + z_j \cdot \int_{\Delta_{jkl}} \frac{|\mathcal{F}^j|}{n} dS^j \right).$$

En employant la définition $z_j = \mathcal{F}^k \times \mathcal{F}^l$ et (A.2.2) plusieurs fois, on obtient (Schlitt et al.,

1995)

$$\Omega_j^* = \frac{1}{z_j} \left(z_j \cdot n\Omega + \lambda(\mathcal{F}^k - \mathcal{F}^l) \cdot \int_{\Delta_{jkl}} \nabla^j \left(\frac{1}{|\mathcal{F}^j|} \right) \times d\vec{S}^j \right),$$

et, d'après le théorème bien connu de Stokes,

$$\Omega_j^* = \frac{1}{z_j} \left(z_j \cdot n\Omega - \lambda(\mathcal{F}^k - \mathcal{F}^l) \cdot \oint_{\Delta_{jkl}} \frac{1}{|\mathcal{F}^j|} d\vec{\mathcal{F}}^j \right).$$

L'intégrale de droite suit le périmètre du triangle, dans le sens trigonométrique, et en évaluant celle-ci avec l'équation (2.22), on a (de Munck, 1992)

$$\Omega_j^* = \frac{1}{2\mu} \left(\bar{z}_j \cdot \bar{n} \Omega + \lambda(\bar{r}_k - \bar{r}_l) \cdot \left[\alpha(\bar{r}_j - \bar{r}_k) + \beta(\bar{r}_k - \bar{r}_l) + \gamma(\bar{r}_l - \bar{r}_j) \right] \right)$$

où

$$\alpha = \frac{1}{|\bar{r}_k - \bar{r}_j|} \ln \left(\frac{|\bar{r}_k - \bar{r}_j| |\bar{r}_k| + (\bar{r}_k - \bar{r}_j) \cdot \bar{r}_k}{|\bar{r}_k - \bar{r}_j| |\bar{r}_j| + (\bar{r}_k - \bar{r}_j) \cdot \bar{r}_j} \right).$$

et où β et γ sont définis d'une façon semblable avec une permutation cyclique des indices (j, k, l) . Finalement, en remplaçant $\bar{r}_j, \bar{r}_k, \bar{r}_l$ par $\bar{r}_j - \bar{r}_m, \bar{r}_k - \bar{r}_m, \bar{r}_l - \bar{r}_m$, respectivement, on obtient l'équation (2.23).

ANNEXE A.3

Quadrature de Gauss

A.3.1 Éléments triangulaires

Considérons un système de coordonnées obliques (η_1, η_2) variant de 0 à 1 sur les côtés d'un triangle (voir figure A.3.1). Les sommets (1, 2, 3) du triangle Δ_{123} sont ordonnés dans le sens trigonométrique positif vu d'un point extérieur près du triangle. La transformation d'un élément de surface dS du système global cartésien de coordonnées (x, y, z) au système intrinsèque à l'élément de coordonnées (η_1, η_2) est donnée par

$$dS = |\bar{J}| d\eta_1 d\eta_2, \quad (\text{A.3.1})$$

où $|\bar{J}|$, le Jacobien, est égal à (Brebbia et al., 1984)

$$|\bar{J}| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta_2} \right| = (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)^{1/2}, \quad (\text{A.3.2})$$

avec

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial y}{\partial \eta_1} \frac{\partial z}{\partial \eta_2} - \frac{\partial y}{\partial \eta_2} \frac{\partial z}{\partial \eta_1}, \\ J_y &= \frac{\partial z}{\partial \eta_1} \frac{\partial x}{\partial \eta_2} - \frac{\partial z}{\partial \eta_2} \frac{\partial x}{\partial \eta_1}, \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

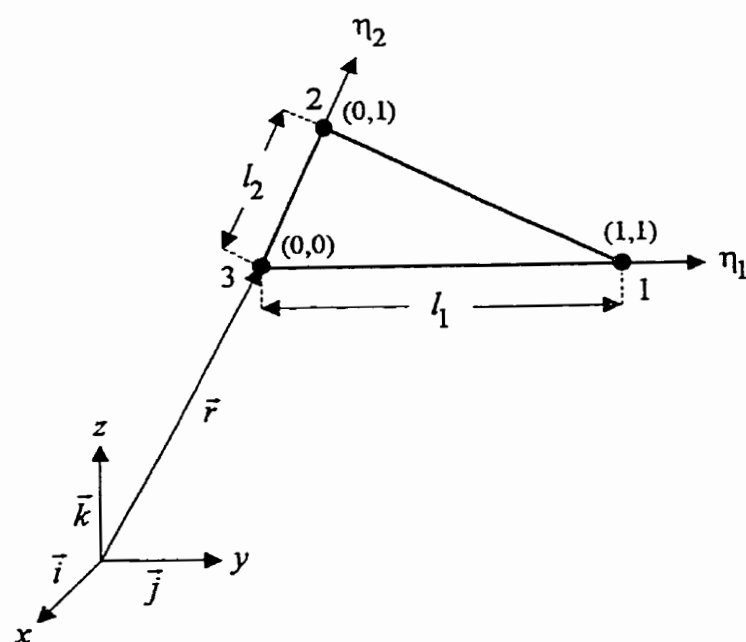


Figure A.3.1. Triangle plan.

$$J_z = \frac{\partial x}{\eta_1} \frac{\partial y}{\eta_2} - \frac{\partial x}{\eta_2} \frac{\partial y}{\eta_1}.$$

Notons que le vecteur de position \vec{r} définissant un point d'un triangle peut s'écrire

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k} + l_1\eta_1\vec{e}_1 + l_2\eta_2\vec{e}_2,$$

où les coordonnées (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) définissent les sommets (1, 2, 3) du triangle en question et

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{x_1 - x_3}{l_1} \right) \vec{i} + \left(\frac{y_1 - y_3}{l_1} \right) \vec{j} + \left(\frac{z_1 - z_3}{l_1} \right) \vec{k},$$

$$\vec{e}_2 = \left(\frac{x_2 - x_3}{l_2} \right) \vec{i} + \left(\frac{y_2 - y_3}{l_2} \right) \vec{j} + \left(\frac{z_2 - z_3}{l_2} \right) \vec{k}.$$

Le vecteur de position \vec{r} devient donc

$$\begin{aligned} \vec{r} = [x_3 + (x_1 - x_3)\eta_1 + (x_2 - x_3)\eta_2] \vec{i} + [y_3 + (y_1 - y_3)\eta_1 + (y_2 - y_3)\eta_2] \vec{j} \\ + [z_3 + (z_1 - z_3)\eta_1 + (z_2 - z_3)\eta_2] \vec{k}, \end{aligned}$$

et les coordonnées cartésiennes d'un point du triangle peuvent alors être exprimées en termes de coordonnées obliques :

$$x = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + (1 - \eta_1 - \eta_2) x_3,$$

$$y = \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + (1 - \eta_1 - \eta_2) y_3,$$

$$z = \eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + (1 - \eta_1 - \eta_2) z_3.$$

On peut simplifier cette notation en définissant une nouvelle coordonnée η_3 , qui n'est pas indépendante, de la façon suivante

$$\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2,$$

et les expressions pour les coordonnées cartésiennes d'un point du triangle en fonction de la position des sommets de ce triangle deviennent donc :

$$\begin{aligned}x &= \sum_{k=1}^3 \eta_k x_k , \\y &= \sum_{k=1}^3 \eta_k y_k , \\z &= \sum_{k=1}^3 \eta_k z_k .\end{aligned}\tag{A.3.4}$$

En évaluant les équations (A.3.3) avec ces définitions, on peut montrer que le Jacobien pour un triangle plan est égale à deux fois l'aire de ce triangle.

L'intégration numérique d'une fonction f sur la surface d'un triangle peut être effectuée en termes des coordonnées obliques η_1, η_2, η_3 de la façon suivante

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta_2} f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 d\eta_2 \cong \sum_{j=1}^{N_p} f(\eta_1^j, \eta_2^j, \eta_3^j) w_j ,\tag{A.3.5}$$

où N_p représente le nombre de points distincts j , définis par les coordonnées $\eta_1^j, \eta_2^j, \eta_3^j$, auxquels la fonction doit être évaluée et w_j les poids associés à chacun de ces points (Brebbia et al., 1984). L'équation (A.3.5) définit l'approximation numérique par la méthode de quadrature de Gauss d'une intégration de surface effectuée sur un domaine triangulaire. Cette méthode fut choisie parce qu'elle demeure la plus précise pour un nombre donnée de points. Les coordonnées triangulaires des points de calcul utilisées

pour différentes valeurs de N_p et leurs poids associés sont rapportées au tableau (A.3.1).

La méthode de quadrature de Gauss est utilisée pour estimer numériquement les diverses intégrales de surface non singulières du chapitre 3. Pour la méthode du potentiel et du flux constants aux centroïdes de triangles plans, l'équation (3.18) peut s'écrire

$$u_{mn}^{(r)} = \sigma_r \int_{\Delta_n} \varepsilon_n(x, y, z) \nabla \left(\frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}(x, y, z)|} \right) \cdot \bar{n}(x, y, z) dS, \quad (m \neq n)$$

où $\varepsilon_n(x, y, z)$ est la fonction d'interpolation sur le triangle Δ_n , soit $\varepsilon_n(x, y, z) = 1$ pour un point d'intégration $\bar{r}(x, y, z)$ sur ce triangle. À partir des équations (A.3.1), (A.3.4),

et, en notant que $\nabla \left(\frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}(x, y, z)|} \right) = \frac{\bar{r}_m - \bar{r}(x, y, z)}{|\bar{r}_m - \bar{r}(x, y, z)|^3}$, ces coefficients pour le cas

$m \neq n$ deviennent :

$$u_{mn}^{(r)} = \sigma_r \int_0^1 \int_0^{1-\eta_2} \frac{\bar{r}_m - \bar{r}(\eta_1, \eta_2)}{|\bar{r}_m - \bar{r}(\eta_1, \eta_2)|^3} \cdot \bar{n}(\eta_1, \eta_2) |\bar{J}| d\eta_1 d\eta_2.$$

D'après l'équation (A.3.5), cette intégrale peut être calculée numériquement, soit

$$u_{mn}^{(r)} \cong -\sigma_r 2\mu_n \lambda_{m,n} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}(\eta_1^j, \eta_2^j)|^3} w_j,$$

où μ_n est l'aire du triangle Δ_n et $\lambda_{m,n}$ est la distance perpendiculaire du point m au plan du triangle Δ_n , soit $\lambda_{m,n} = (\bar{r}(\eta_1, \eta_2) - \bar{r}_m) \cdot \bar{n}(\eta_1, \eta_2)$. On procède de la même façon pour l'équation (3.19) :

Tableau A.3.1. Quadrature de Gauss pour les triangles (Brebbia et al., 1984).

N_p	j	η_1^j	η_2^j	η_3^j	$2w_j$
1	1	1/3	1/3	1/3	1
2	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4	1	1/3	1/3	1/3	-9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48
7	1	0.333 333 33	0.333 333 33	0.333 333 33	0.225 000 00
	2	0.797 426 99	0.101 286 51	0.101 286 51	0.125 939 18
	3	0.101 286 51	0.797 426 99	0.101 286 51	0.125 939 18
	4	0.101 286 51	0.101 286 51	0.797 426 99	0.125 939 18
	5	0.059 715 87	0.470 142 06	0.470 142 06	0.132 394 15
	6	0.470 142 06	0.059 715 87	0.470 142 06	0.132 394 15
	7	0.470 142 06	0.470 142 06	0.059 715 87	0.132 394 15
13	1	0.333 333 33	0.333 333 33	0.333 333 33	-0.149 570 04
	2	0.479 308 07	0.260 345 97	0.260 345 97	0.175 615 26
	3	0.260 345 97	0.479 308 07	0.260 345 97	0.175 615 26
	4	0.260 345 97	0.260 345 97	0.479 308 07	0.175 615 26
	5	0.869 739 80	0.065 130 10	0.065 130 10	0.053 347 24
	6	0.065 130 10	0.869 739 80	0.065 130 10	0.053 347 24
	7	0.065 130 10	0.065 130 10	0.869 739 80	0.053 347 24
	8	0.638 444 19	0.312 865 50	0.048 690 32	0.077 113 76
	9	0.312 865 50	0.638 444 19	0.048 690 32	0.077 113 76
	10	0.638 444 19	0.048 690 32	0.312 865 50	0.077 113 76
	11	0.048 690 32	0.638 444 19	0.312 865 50	0.077 113 76
	12	0.312 865 50	0.048 690 32	0.638 444 19	0.077 113 76
	13	0.048 690 32	0.312 865 50	0.638 444 19	0.077 113 76

$$q_{mn}^{(r)} \equiv 2\mu_n \sum_{j=1}^{N_p} \frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}(\eta_1^j, \eta_2^j)|} w_j .$$

En posant $\bar{r}_j = \bar{r}(\eta_1^j, \eta_2^j)$, on obtient les équations (3.20) et (3.21), respectivement.

La valeur d'une quelconque fonction géométrique $\phi(x, y, z)$ peut être interpolée de façon linéaire sur la surface d'un triangle plan par l'entremise des valeurs de cette fonction aux sommets et de trois fonctions d'interpolation $\varepsilon_k(x, y, z)$ associés, telle que :

$$\phi(x, y, z) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_k(x, y, z) \phi_k . \quad (\text{A.3.6})$$

D'une manière semblable à celle utilisée pour la dérivation des équations (A.3.4), on peut montrer que

$$\phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sum_{k=1}^3 \eta_k \phi_k ,$$

et donc

$$\varepsilon_k(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \eta_k .$$

Notons que l'équation (A.3.6) est semblable à l'équation (3.9) ou (3.10) pour la méthode du potentiel linéaire aux sommets de triangles plans (avec $h_n^{(r)}(\bar{r})$ et $g_n^{(r)}(\bar{r})$ définies dans les équations (3.22) et (3.23), respectivement). Ainsi, les termes valent

$$\eta_1^j = \frac{d(\bar{r}_j; \bar{r}_2; \bar{r}_3)}{d(\bar{r}_1; \bar{r}_2; \bar{r}_3)}, \quad \eta_2^j = \frac{d(\bar{r}_j; \bar{r}_3; \bar{r}_1)}{d(\bar{r}_2; \bar{r}_3; \bar{r}_1)}, \quad \text{et} \quad \eta_3^j = \frac{d(\bar{r}_j; \bar{r}_1; \bar{r}_2)}{d(\bar{r}_3; \bar{r}_1; \bar{r}_2)} .$$

Donc en procédant comme

pour un potentiel et un flux constant, les équations (3.24) et (3.25) deviennent

$$u_{mn}^{(r)} \equiv -\sigma_r \sum_{\forall \Delta_{n(kl)}} 2\mu_{nkl} \lambda_{m,nkl} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{d(\bar{r}_j; \bar{r}_k; \bar{r}_l)}{d(\bar{r}_n; \bar{r}_k; \bar{r}_l)} \frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}_j|^3} w_j$$

et

$$q_{mn}^{(r)} \equiv \sum_{\forall \Delta_{n(kl)}} 2\mu_{nkl} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{d(\bar{r}_j; \bar{r}_k; \bar{r}_l)}{d(\bar{r}_n; \bar{r}_k; \bar{r}_l)} \frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}_j|} w_j ,$$

respectivement. Cette fois-ci μ_{nkl} est l'aire du triangle Δ_{nkl} , $\lambda_{m,nkl}$ est la distance perpendiculaire du point m au plan du triangle Δ_{nkl} , et le point d'intégration j est défini par le vecteur $\bar{r}_j = \bar{r}(\eta_1^j, \eta_2^j)$.

A.3.2 Éléments quadrilatéraux

On considère maintenant un quadrilatère curviligne défini par 9 points sur lequel les coordonnées obliques (η_1, η_2) varient de -1 à +1 (voir figure A.3.2). Comme pour les triangles (équation (A.3.4) et (A.3.6)), on peut écrire

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^9 \varepsilon_k x_k , \\ y &= \sum_{k=1}^9 \varepsilon_k y_k , \end{aligned} \tag{A.3.7}$$

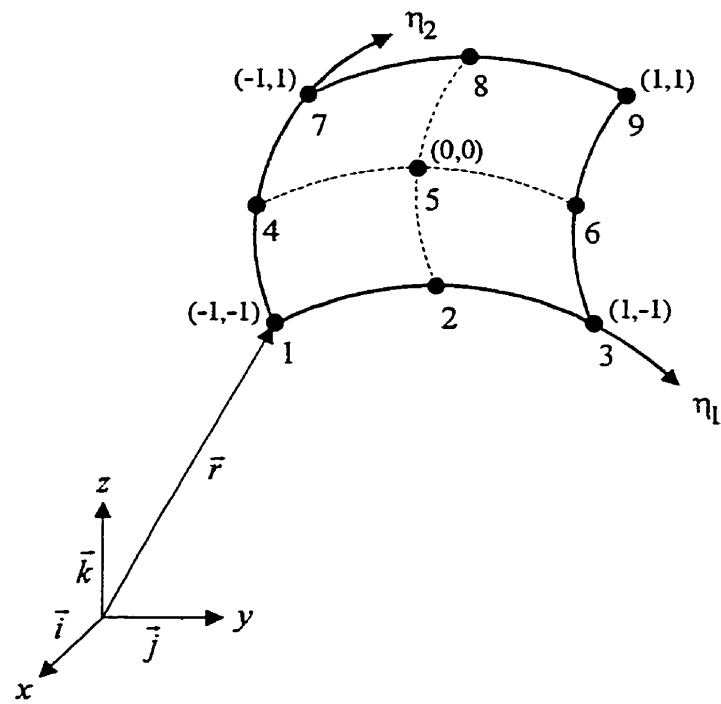


Figure A.3.2. Quadrilatère quadratique à 9 points.

$$z = \sum_{k=1}^9 \varepsilon_k z_k ,$$

et

$$\phi(\eta_1, \eta_2) = \sum_{k=1}^9 \varepsilon_k \phi_k . \quad (\text{A.3.8})$$

Les fonctions d'interpolation ε_k peuvent être générées en prenant les expansions des fonctions d'interpolation en une dimension. En considérant l'élément quadratique à une dimension allant du sommet 4 au sommet 6 (voir figure A.3.2), on peut écrire (Brebbia et al., 1984) :

$$\phi(\eta_1) = \frac{1}{2} \eta_1 (\eta_1 - 1) \phi_4 + (1 - \eta_1^2) \phi_5 + \frac{1}{2} \eta_1 (1 + \eta_1) \phi_6 .$$

Si on prend maintenant l'expansion de ϕ_4 , ϕ_5 , et ϕ_6 dans la direction de η_2 , on obtient

$$\begin{aligned} \phi(\eta_1, \eta_2) = & \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 - 1) \eta_2 (\eta_2 - 1) \phi_1 + \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) \eta_2 (\eta_2 - 1) \phi_2 \\ & + \frac{1}{4} \eta_1 (1 + \eta_1) \eta_2 (\eta_2 - 1) \phi_3 + \frac{1}{2} \eta_1 (\eta_1 - 1) (1 - \eta_2^2) \phi_4 \\ & + (1 - \eta_1^2) (1 - \eta_2^2) \phi_5 + \frac{1}{2} \eta_1 (1 + \eta_1) (1 - \eta_2^2) \phi_6 \\ & + \frac{1}{4} \eta_1 (\eta_1 - 1) \eta_2 (1 + \eta_2) \phi_7 + \frac{1}{2} (1 - \eta_1^2) \eta_2 (1 + \eta_2) \phi_8 \\ & + \frac{1}{4} \eta_1 (1 + \eta_1) \eta_2 (1 + \eta_2) \phi_9 , \end{aligned} \quad (\text{A.3.9})$$

Le Jacobien $|\bar{J}|$ est résolu de la même façon que pour les triangles, soit en évaluant l'équation (A.3.3). L'intégration de surface sur un quadrilatère peut être évaluée avec la méthode de Gauss de la façon suivante

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \equiv \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} f(\eta_1^i, \eta_2^j) w_i w_j, \quad (\text{A.3.10})$$

où les coordonnées et les poids des points d'intégration pour chaque dimension sont donnés dans le tableau (A.3.2).

Tableau A.3.2. Quadrature de Gauss pour les quadrilatères (Brebbia et al., 1984).

$\pm \eta_{1,2}^j$	w_j	$\pm \eta_{1,2}^j$	w_j
$N_p = 2$		$N_p = 8$	
0.577 350 27	1.000 000 00	0.183 434 64	0.362 682 78
		0.525 532 41	0.313 706 65
$N_p = 3$		0.796 666 48	0.222 381 03
0.000 000 00	0.888 888 89	0.960 289 86	0.101 228 54
0.774 596 67	0.555 555 56	$N_p = 9$	
$N_p = 4$		0.000 000 00	0.330 239 36
0.339 981 04	0.652 145 15	0.324 253 42	0.312 347 08
0.861 136 31	0.347 854 85	0.613 371 43	0.260 610 70
$N_p = 5$		0.836 031 11	0.180 649 16
0.000 000 00	0.568 888 89	0.968 160 24	0.081 274 39
0.538 469 31	0.478 628 67	$N_p = 10$	
0.906 179 85	0.236 926 89	0.148 874 34	0.295 524 22
$N_p = 6$		0.433 395 39	0.269 266 72
0.238 619 19	0.467 913 93	0.679 409 57	0.219 086 36
0.661 209 39	0.360 761 57	0.865 063 37	0.149 451 35
0.932 469 51	0.171 324 49	0.973 906 53	0.066 671 34
$N_p = 7$		$N_p = 12$	
0.000 000 00	0.417 959 18	0.125 233 41	0.249 147 05
0.405 845 15	0.381 830 05	0.367 831 50	0.233 492 54
0.741 531 19	0.279 705 39	0.587 317 95	0.203 167 43
0.949 107 91	0.129 484 97	0.769 902 67	0.160 078 33
		0.904 117 26	0.106 939 33
		0.981 560 63	0.047 175 34

ANNEXE A.4

Résolution d'intégrales singulières

A.4.1 Éléments triangulaires

Les éléments de la matrice $Q^{(r)}$ (voir chapitre 3) qui contiennent des singularités intégrables peuvent être, dans certains cas, évalués analytiquement en utilisant des coordonnées polaires. Pour un flux supposé constant sur un triangle plan et associé au centroïde de ce triangle, un système de coordonnées polaires (ϱ, θ) est défini localement sur un triangle Δ_k (voir figure A.4.1) de sorte que l'équation (3.19), qu'on peut écrire sous la forme

$$I_k = \int_{\Delta_k} \frac{1}{|\bar{r}_k - \bar{r}(x, y, z)|} dS = \int_{\Delta_k} \frac{1}{\varrho} dS,$$

où \bar{r}_k représente le point d'observation (le centroïde du triangle Δ_k) et $\bar{r}(x, y, z)$ représente un point du triangle, devienne

$$I_k = \int_0^{\theta_1} \int_0^{\varrho_1(\theta)} \frac{1}{\varrho} \varrho d\varrho d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} \int_0^{\varrho_2(\theta)} \frac{1}{\varrho} \varrho d\varrho d\theta + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\pi} \int_0^{\varrho_3(\theta)} \frac{1}{\varrho} \varrho d\varrho d\theta,$$

d'où

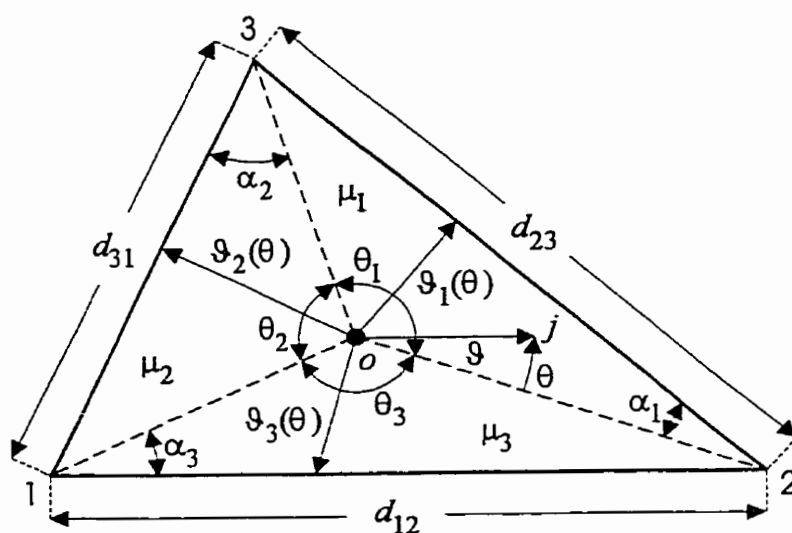


Figure A.4.1. Définitions géométriques dans le cas d'un flux supposé constant sur un triangle plan. Le point o représente le centroïde du triangle et sert à diviser ce triangle en trois autres triangles d'aire μ_1 , μ_2 , et μ_3 , respectivement. Notons que les aires μ_1 , μ_2 , et μ_3 sont égaux. Un point arbitraire j est caractérisé par les coordonnées ϱ, θ .

$$I_k = \int_0^{\theta_1} \int_0^{\vartheta_1(\theta)} d\vartheta d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1+\theta_2} \int_0^{\vartheta_2(\theta)} d\vartheta d\theta + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\pi} \int_0^{\vartheta_3(\theta)} d\vartheta d\theta. \quad (\text{A.4.1})$$

Effectivement, dans les équations (A.4.1) le terme singulier $\frac{1}{g}$ a été éliminé des

intégrales. De la figure A.4.1, on a $\vartheta_1(\theta) \sin(\theta + \alpha_1) = \frac{2\mu_k}{3d_{23}}$,

$\vartheta_2(\theta) \sin(\theta - \theta_1 + \alpha_2) = \frac{2\mu_k}{3d_{31}}$, et $\vartheta_3(\theta) \sin(\theta - \theta_1 - \theta_2 + \alpha_3) = \frac{2\mu_k}{3d_{12}}$, où μ_k est l'aire

du triangle Δ_k . Avec ces définitions, la première intégrale à droite de l'équation ci-dessus peut être évaluée de la façon suivante :

$$\int_0^{\theta_1} \int_0^{\vartheta_1(\theta)} d\vartheta d\theta = \int_0^{\theta_1} \frac{2\mu_k}{3d_{23} \sin(\theta + \alpha_1)} d\theta = \frac{2\mu_k}{3d_{23}} \ln \left(\frac{\tan[(\theta_1 + \alpha_1)/2]}{\tan(\alpha_1/2)} \right).$$

En faisant le même pour les deux autres intégrales de l'équation (A.4.1), on obtient donc (Brebbia et al., 1984)

$$I_k = \frac{2\mu_k}{3} \left[\frac{1}{d_{23}} \ln \left(\frac{\tan[(\theta_1 + \alpha_1)/2]}{\tan[\alpha_1/2]} \right) + \frac{1}{d_{31}} \ln \left(\frac{\tan[(\theta_2 + \alpha_2)/2]}{\tan[\alpha_2/2]} \right) + \frac{1}{d_{12}} \ln \left(\frac{\tan[(\theta_3 + \alpha_3)/2]}{\tan[\alpha_3/2]} \right) \right]. \quad (\text{A.4.2})$$

Maintenant, on procède de la même façon pour un flux supposé linéaire sur un triangle plan Δ_{123} et associé aux sommets de ce triangle. D'après l'annexe A.3, l'équation (3.25) pour un triangle peut se réécrire

$$I_{k_1}^{k_2} = \int_{\Delta_{123}} \eta_{k_2} \frac{1}{|\bar{r}_{k_1} - \bar{r}(x, y, z)|} dS = \int_{\Delta_{123}} \eta_{k_2} \frac{1}{g} dS,$$

où \bar{r}_{k_1} représente le point d'observation (un des 3 sommets ($k_1 = 1, 2, 3$) du triangle Δ_{123}). L'intégrale $I_{k_1}^{k_2}$ décrit la contribution du triangle au sommet k_2 ($k_2 = 1, 2, 3$) pour un certain point d'observation k_1 . En définissant localement un système de coordonnées polaires (g, θ) sur le triangle Δ_{123} (voir figure A.4.2), on peut écrire (Soucy, 1990)

$$I_{k_1}^{k_2} = \int_0^\beta \int_0^{g(\theta)} \eta_{k_2} \frac{1}{g} g dg d\theta = \int_0^\beta \int_0^{g(\theta)} \eta_{k_2} dg d\theta, \quad (\text{A.4.3})$$

et on a les relations :

$$g(\theta) \sin(\theta + \alpha) = d_{31} \sin(\alpha),$$

$$\eta_1 d_{31} \sin(\beta) = g \sin(\beta - \theta),$$

$$\eta_2 d_{23} \sin(\beta) = g \sin(\theta),$$

$$\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2.$$

Soit \bar{r}_3 le vecteur représentant le point d'observation ($k_1 = 3$). Pour $k_2 = 1$, on a alors :

$$\begin{aligned} I_3^1 &= \int_0^\beta \int_0^{g(\theta)} \eta_1 dg d\theta = \int_0^\beta \int_0^{g(\theta)} \frac{g \sin(\beta - \theta)}{d_{31} \sin(\beta)} dg d\theta = \int_0^\beta \frac{\sin(\beta - \theta)}{d_{31} \sin(\beta)} \frac{g^2(\theta)}{2} d\theta \\ &= \int_0^\beta \frac{\sin(\beta - \theta)}{d_{31} \sin(\beta)} \frac{d_{31}^2 \sin^2(\alpha)}{2 \sin^2(\theta + \alpha)} d\theta. \end{aligned}$$

En sachant que

$$\begin{aligned}\sin(\beta - \theta) &= \sin((\alpha + \beta) - (\theta + \alpha)) \\ &= \sin(\alpha + \beta) \cos(\theta + \alpha) - \cos(\alpha + \beta) \sin(\theta + \alpha),\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}I_3^1 &= \frac{d_{31} \sin^2(\alpha)}{2 \sin(\beta)} \left[\sin(\alpha + \beta) \int_0^\beta \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\sin^2(\theta + \alpha)} d\theta - \int_0^\beta \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\theta + \alpha)} d\theta \right] \\ &= \frac{d_{31} \sin^2(\alpha)}{2 \sin(\beta)} \left[\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha)} - 1 - \cos(\alpha + \beta) \ln \left(\frac{\tan((\alpha + \beta)/2)}{\tan(\alpha/2)} \right) \right]. \quad (\text{A.4.4})\end{aligned}$$

Un développement semblable nous permet d'évaluer l'intégrale I_3^2 ,

$$I_3^2 = \int_0^\beta \int_0^{\vartheta(\theta)} \eta_2 d\vartheta d\theta = \int_0^\beta \frac{\sin(\theta)}{d_{23} \sin(\beta)} \frac{d_{31}^2 \sin^2(\alpha)}{2 \sin^2(\theta + \alpha)} d\theta,$$

qui devient :

$$\begin{aligned}I_3^2 &= \frac{d_{31}^2 \sin^2(\alpha)}{2 d_{23} \sin(\beta)} \left[-\sin(\alpha) \int_0^\beta \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\sin^2(\theta + \alpha)} d\theta + \int_0^\beta \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\theta + \alpha)} d\theta \right] \\ &= \frac{d_{31}^2 \sin^2(\alpha)}{2 d_{23} \sin(\beta)} \left[\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} - 1 + \cos(\alpha) \ln \left(\frac{\tan((\alpha + \beta)/2)}{\tan(\alpha/2)} \right) \right]. \quad (\text{A.4.5})\end{aligned}$$

Pour $k_2 = 3$, le point d'observation,

$$I_3^3 = \int_0^\beta \int_0^{\vartheta(\theta)} \eta_3 d\vartheta d\theta = \int_0^\beta \int_0^{\vartheta(\theta)} d\vartheta d\theta - \int_0^\beta \int_0^{\vartheta(\theta)} \eta_1 d\vartheta d\theta - \int_0^\beta \int_0^{\vartheta(\theta)} \eta_2 d\vartheta d\theta$$

et, en notant que la première intégrale de droite est semblable à celles de la méthode du potentiel constant, on peut l'évaluer de la même façon :

$$I_3^3 = d_{31} \sin(\alpha) \ln \left(\frac{\tan((\alpha + \beta)/2)}{\tan(\alpha/2)} \right) - I_3^1 - I_3^2. \quad (\text{A.4.6})$$

Les intégrales $I_{k_1}^{k_2}$ pour $k_1 = 1$ et 2 sont évaluées de la même manière.

A.4.2 Éléments quadrilatéraux

Considérons l'intégrale de la forme

$$I_{k_1}^{k_2} = \int_{\Delta_q} \frac{\varepsilon_{k_2}(x, y, z)}{|\vec{r}_{k_1} - \vec{r}(x, y, z)|} dS,$$

où Δ_q est un quadrilatère curviligne à 9 points (voir figure A.3.2) et $\varepsilon_{k_2}(x, y, z)$ est la fonction d'interpolation quadratique du flux sur cet élément, associée à son sommet k_2 ($k_2 = 1, 2, \dots, 9$). En utilisant les coordonnées obliques (η_1, η_2) définies dans l'annexe A.3, l'intégrale ci-dessus devient

$$I_{k_1}^{k_2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon_{k_2}(\eta_1, \eta_2)}{|\vec{r}_{k_1} - \vec{r}(\eta_1, \eta_2)|} |\vec{J}(\eta_1, \eta_2)| d\eta_1 d\eta_2,$$

où $|\bar{J}(\eta_1, \eta_2)| = \left| \frac{\partial \bar{r}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \bar{r}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \right|$. Comme pour les triangles, quand le point d'observation k_1 est sur le quadrilatère même, $|\bar{r}_{k_1} - \bar{r}(\eta_1, \eta_2)|$ devient 0 à ce point et l'intégrale $I_{k_1}^{k_2}$ est singulière. Encore une fois, cette singularité peut être traitée en utilisant des coordonnées polaires. À cette fin, pour un point d'observation k_1 à un des 9 points du quadrilatère Δ_q , on divise ce dernier en T_{k_1} triangles plans Δ_t , $t = 1, \dots, T_{k_1}$ (voir figure A.4.3). Ensuite pour chaque triangle Δ_t , on peut introduire les coordonnées polaires (ϑ, θ) telles que

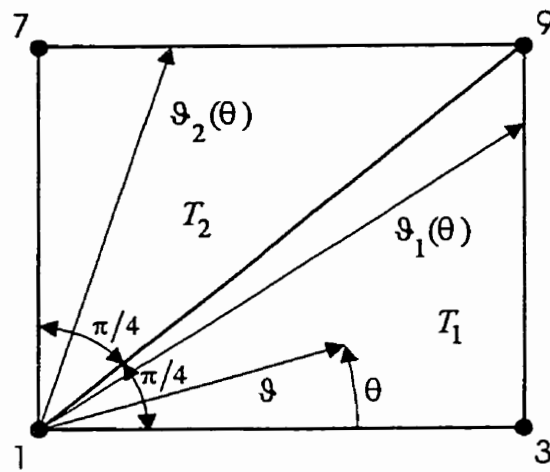
$$I_{k_1}^{k_2} = \sum_{t=1}^{T_{k_1}} I_{k_1}^{k_2}(t),$$

où

$$I_{k_1}^{k_2}(t) = \int_{\theta_t^{\min}}^{\theta_t^{\max}} \int_0^{\vartheta_t(\theta)} \frac{\varepsilon_{k_2}(\eta_1(\vartheta, \theta), \eta_2(\vartheta, \theta))}{|\bar{r}_{k_1} - \bar{r}(\eta_1(\vartheta, \theta), \eta_2(\vartheta, \theta))|} \vartheta |\bar{J}(\eta_1(\vartheta, \theta), \eta_2(\vartheta, \theta))| d\vartheta d\theta.$$

En transformant le système de coordonnées polaires (ϑ, θ) dans un autre système de coordonnées obliques (u, v) , on obtient

$$I_{k_1}^{k_2}(t) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon_{k_2}(\eta_1(\vartheta(u, v), \theta(v)), \eta_2(\vartheta(u, v), \theta(v)))}{|\bar{r}_{k_1} - \bar{r}(\eta_1(\vartheta(u, v), \theta(v)), \eta_2(\vartheta(u, v), \theta(v)))|} \vartheta(u, v) |\bar{J}(\eta_1(\vartheta(u, v), \theta(v)), \eta_2(\vartheta(u, v), \theta(v)))| \frac{\vartheta_t(\theta(v))(\theta_t^{\max} - \theta_t^{\min})}{4} du dv,$$



$$\theta_1^{\min} = 0 \leq \theta \leq \pi/4 = \theta_1^{\max}$$

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{2}{\cos \theta} = \vartheta_1(\theta)$$

$$\theta_2^{\min} = \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 = \theta_2^{\max}$$

$$0 \leq \vartheta \leq \frac{2}{\sin \theta} = \vartheta_2(\theta)$$

Figure A.4.3. Exemple de division de quadrilatères curviligne en triangles plans pour un point d'observation situé au coin 1 ($k_1 = 1$). Pour T_1 : $u = \vartheta \cos \theta - 1$ et $v = \frac{8}{\pi} \theta - 1$; pour T_2 :

$$u = \vartheta \sin \theta - 1 \text{ et } v = \frac{8}{\pi} \theta - 3.$$

où $\mathcal{G}(u, v) = \frac{\mathcal{G}_t(\theta(v))}{2}u + \frac{\mathcal{G}_t(\theta(v))}{2}$ et $\theta(v) = \frac{\theta_t^{\max} - \theta_t^{\min}}{2}v + \frac{\theta_t^{\max} + \theta_t^{\min}}{2}$ (voir figure

A.4.3). Notons que les définitions de $\mathcal{G}(u, v)$ et $\theta(v)$ sont simplement un choix parmi d'autres, choix qui permet l'utilisation des coordonnées et des poids utilisés pour les autres intégrations sur un quadrilatère à 9 points (voir plus loin). Ces définitions nous

permettent aussi d'écrire $d\theta = \frac{\theta_t^{\max} - \theta_t^{\min}}{2}dv$ et $d\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}_t(\theta(v))}{2}du$, car $\theta(v)$ est fixé

dans l'intégrale intérieure de l'équation ci-dessus. D'après l'équation (A.3.10), cette intégrale peut être résolue numériquement de la façon suivante :

$$I_{k_1}^{k_2}(t) \equiv \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \frac{\varepsilon_{k_2}(\eta_1(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)), \eta_2(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)))}{|\bar{r}_{k_1} - \bar{r}(\eta_1(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)), \eta_2(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)))|} \mathcal{G}(u^i, v^j) \\ | \bar{J}(\eta_1(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)), \eta_2(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j))) | \frac{\mathcal{G}_t(\theta(v^j))(\theta_t^{\max} - \theta_t^{\min})}{4} w_i w_j,$$

où les coordonnées (u, v) des points d'intégration et leurs poids associés w_i, w_j sont donnés dans le tableau (A.3.2).

Notons que pour un point d'intégration près du point d'observation k_1 , on a

$$\mathcal{G}(u^i, v^j) \approx |\bar{r}_{k_1} - \bar{r}(\eta_1(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)), \eta_2(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)))|,$$

où $\mathcal{G}(u^i, v^j)$ est la distance entre le point d'observation k_1 et la projection du point du quadrilatère curviligne Δ_q définie par $\bar{r}(\eta_1(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)), \eta_2(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)))$ sur le triangle t , par rapport à la normale à ce point. Les termes $\mathcal{G}(u^i, v^j)$ et

$\left| \bar{r}_{k_1} - \bar{r}(\eta_1(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j)), \eta_2(\mathcal{G}(u^i, v^j), \theta(v^j))) \right|$ de l'équation ci-dessus s'annulent

alors quand le point d'intégration est près du point d'observation et donc la singularité est éliminée. Au chapitre 3, on a mentionné que pour la matrice $U^{(r)}$, l'intégrale de l'équation (3.13) sur un quadrilatère curviligne contenant le point d'observation est également singulière. Cependant, il est possible de montrer que la singularité

$\frac{\bar{r}_m - \bar{r}(x, y, z)}{|\bar{r}_m - \bar{r}(x, y, z)|^3}$ de cette équation est du même ordre de celle de l'équation (3.14), soit

$\frac{1}{|\bar{r}_m - \bar{r}(x, y, z)|}$ (Hayami et Brebbia, 1988) et cette singularité de bas ordre peut alors

être traitée de la même manière avec les coordonnées polaires.

ANNEXE A.5

Potentiel analytique sur trois sphères concentriques

Le potentiel Φ^a analytique à un point arbitraire de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) d'un modèle de trois sphères concentriques (voir figure A.5.1) est décrit par les expressions (Arthur et Geselowitz, 1970)

$$\Phi^a(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^{n+1}} + B_n r^n \right) P_n^0(\cos\theta), \quad \text{si } e < r \leq r_3, \quad (\text{A.5.1})$$

$$\Phi^a(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{r^{n+1}} + D_n r^n \right) P_n^0(\cos\theta), \quad \text{si } r_3 \leq r \leq r_2, \text{ et} \quad (\text{A.5.2})$$

$$\Phi^a(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{E_n}{r^{n+1}} + F_n r^n \right) P_n^0(\cos\theta), \quad \text{si } r_2 \leq r \leq 1, \quad (\text{A.5.3})$$

où e est l'excentricité du dipôle radial \vec{p} placé sur l'axe des z , et P_n^m est un polynôme de Legendre associé. Les coefficients A_n , B_n , C_n , D_n , E_n , et F_n dépendent des conditions de frontière : le potentiel et flux, c'est-à-dire la composante normale et donc radiale du courant, sont continus sur la surface S_2 et S_3 , et le flux est nul sur la surface

S_1 , c'est-à-dire $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0$. On a alors les cinq relations suivantes :

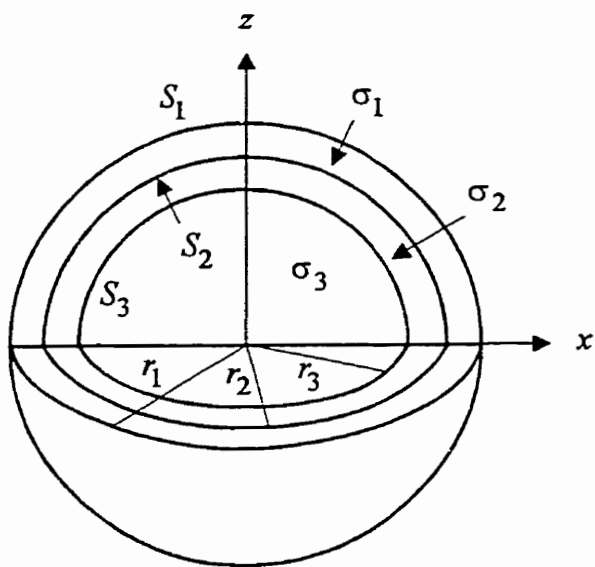


Figure A.5.1. Modèle à 3 sphères concentriques. La sphère S_1 de rayon r_1 représente la surface externe du cuir chevelu (de conductivité σ_1), la sphère S_2 de rayon r_2 représente la surface externe du crâne (de conductivité σ_2), et la sphère S_3 de rayon r_3 représente la surface externe du cerveau (de conductivité σ_3).

$$\frac{1}{\sigma_3} \left(\frac{A_n}{r_3^{n+1}} + B_n r_3^n \right) = \frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{C_n}{r_3^{n+1}} + D_n r_3^n \right), \quad (\text{A.5.4})$$

$$\frac{1}{\sigma_2} \left(\frac{C_n}{r_2^{n+1}} + D_n r_2^n \right) = \frac{1}{\sigma_1} \left(\frac{E_n}{r_2^{n+1}} + F_n r_2^n \right), \quad (\text{A.5.5})$$

$$-\frac{(n+1)A_n}{r_3^{n+2}} + nB_n r_3^{n-1} = -\frac{(n+1)C_n}{r_3^{n+2}} + nD_n r_3^{n-1}, \quad (\text{A.5.6})$$

$$-\frac{(n+1)C_n}{r_2^{n+2}} + nD_n r_2^{n-1} = -\frac{(n+1)E_n}{r_2^{n+2}} + nF_n r_2^{n-1}, \quad (\text{A.5.7})$$

$$-\frac{(n+1)E_n}{r_1^{n+2}} + nF_n r_1^{n-1} = 0. \quad (\text{A.5.8})$$

En supposant que $\sigma_1 = \sigma_3$ et en notant que, pour un dipôle radial d'amplitude 1 et d'excentricité e sur l'axe z , $A_n = ne^{n-1}$, Arthur et Geselowitz (1970) ont résolu le système de cinq équations ci-dessus pour le potentiel sur la surface externe, soit

$$\Phi^a(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\sigma_1 r_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^3 \sigma_2 e^{n-1}}{(n+1)n\sigma_1 r_1^{n-1} \rho_n} n P_n^0(\cos \theta), \quad (\text{A.5.9})$$

où

$$\begin{aligned} \rho_n = & - \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} n + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + n \right) \left(\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{2n+1} - \left(\frac{r_3}{r_1} \right)^{2n+1} \right) - \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right)^2 n \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^{2n+1} \\ & + \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} n + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + n \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} n + n + 1 \right). \end{aligned}$$

Considérons le cas où le rayon de la sphère externe est égale à 1. L'équation (A.5.3) nous donne, pour un point sur la surface S_1 ,

$$\Phi^a(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} (E_n + F_n) P_n^0(\cos\theta).$$

Notons que, mis à part le facteur $\frac{1}{r_1^2}$, l'équation (A.5.9) pour le potentiel sur la surface externe ne contient que des rapports entre les rayons des trois sphères (et l'excentricité du dipôle). Si on prend maintenant un rayon quelconque r_1 mais qu'on préserve ces rapports-là, il est évident que le potentiel ne changera que par ce facteur $\frac{1}{r_1^2}$. Donc,

quelle que soit la valeur de r_1 , on peut écrire

$$\Phi^a(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\sigma_1 r_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} (E_n + F_n) P_n^0(\cos\theta) \quad (\text{A.5.10})$$

pour un point sur la surface externe. L'équation (A.5.3) pour un point sur la surface S_2 est donnée par :

$$\Phi^a(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{E_n}{r_2^{n+1}} + F_n r_2^n \right) P_n^0(\cos\theta). \quad (\text{A.5.11})$$

On a vu que le flux sur la surface S_1 est nul, donc avec l'équation (A.5.3) on a la relation

$$\frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} (-(n+1)E_n + nF_n) P_n^0(\cos\theta) = 0,$$

d'où

$$nF_n = (n+1)E_n. \quad (\text{A.5.12})$$

L'équation (A.5.12) sert à simplifier l'équation (A.5.10) pour la surface S_1 ,

$$\begin{aligned} \Phi^a(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{4\pi\sigma_1 r_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nF_n}{n+1} + F_n \right) P_n^0(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma_1 r_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} F_n P_n^0(\cos\theta), \end{aligned} \quad (\text{A.5.13})$$

et l'équation (A.5.11) pour la surface S_2 ,

$$\begin{aligned} \Phi^a(r, \theta, \phi) &= \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nF_n}{(n+1)r_2^{n+1}} + F_n r_2^n \right) P_n^0(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{r_2^{n+1}} + (n+1)r_2^n \right) \frac{F_n}{n+1} P_n^0(\cos\theta). \end{aligned} \quad (\text{A.5.14})$$

En comparant les équations (A.5.13) et (A.5.14), on peut obtenir les potentiels sur la surface S_2 en multipliant chaque terme de l'équation (A.5.9) pour le potentiel sur la surface S_1 par le facteur

$$\frac{n}{(2n+1)r_2^{n+1}} + \frac{n+1}{2n+1} r_2^n.$$

En notant que A_n et le côté droit de l'équation (A.5.5) sont maintenant connus, on peut résoudre le système de trois équations (A.5.4), (A.5.5) et (A.5.6) pour le potentiel analytique sur la surface interne. L'équation (A.5.6) peut s'écrire :

$$B_n = \frac{(n+1)A_n}{nr_3^{2n+1}} - \frac{(n+1)C_n}{nr_3^{2n+1}} + D_n.$$

Soit $\sigma_1 = \sigma_3$ et $k = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. En le remplaçant dans l'équation (A.5.4), on obtient

$$D_n = -\frac{k(2n+1)A_n}{(k-1)nr_3^{2n+1}} + \frac{(n+k(n+1))C_n}{(k-1)nr_3^{2n+1}},$$

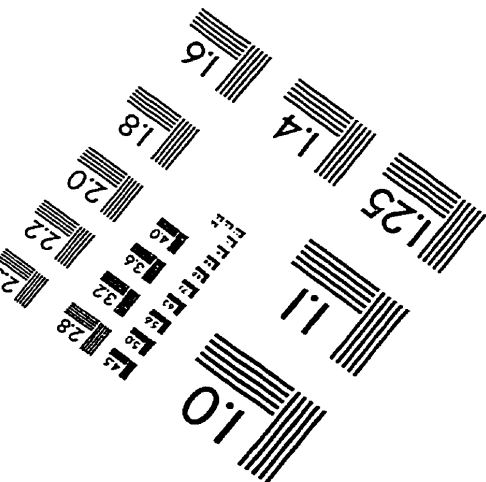
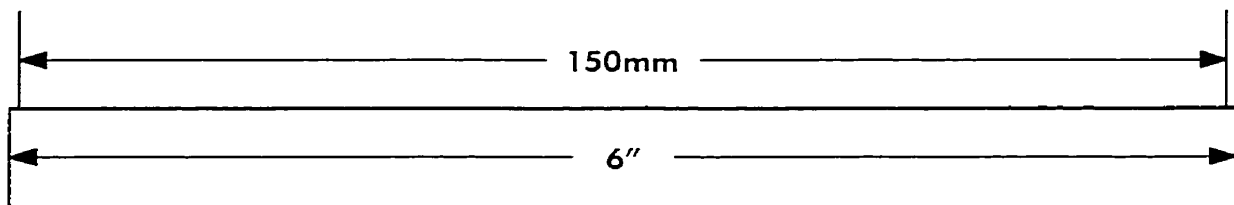
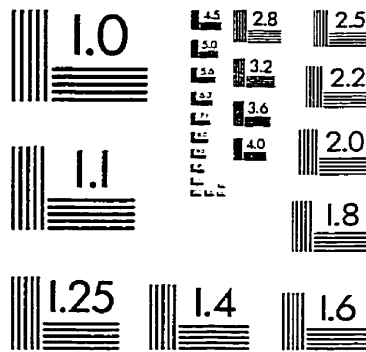
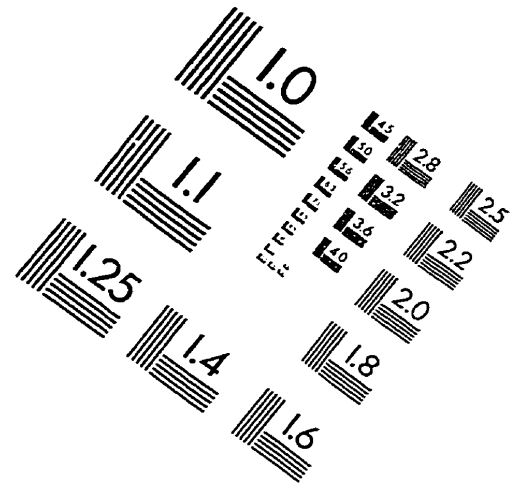
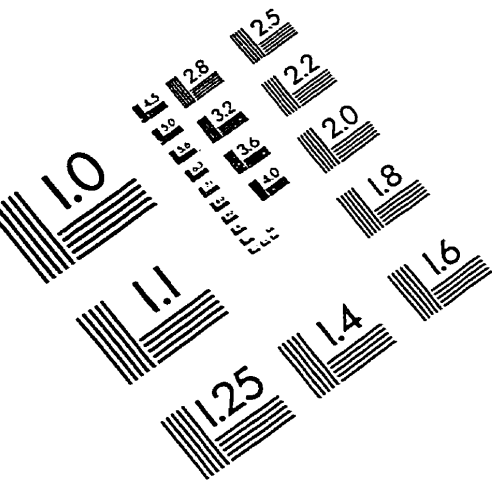
qu'on remplace, à son tour, dans l'équation (A.5.5), soit

$$C_n = \frac{(k-1)nr_3^{2n+1} + (n+k(n+1))r_2^{2n+1}}{k(k-1)nr_3^{2n+1}r_2^{n+1}} \left[\frac{(2n+1)r_2^n A_n}{(k-1)nr_3^{2n+1}} + \frac{E_n}{r_2^{n+1}} + F_n r_2^n \right].$$

Le côté droit de l'équation ci-dessus est entièrement connu et on peut maintenant trouver C_n , D_n et B_n , ce qui permet le calcul du potentiel sur la surface interne S_3 avec l'équation (A.5.1).

Notons que pour un dipôle tangentiel placé sur l'axe des x , $A_n = e^{n-1}$ (Arthur et Geselowitz, 1970) et on peut montrer qu'il suffit de remplacer $nP_n^0(\cos\theta)$ par $P_n^1(\cos\theta)\cos\phi$ dans toutes nos équations pour calculer le potentiel dans ce cas. Un changement d'axe (par exemple, si le dipôle est placé sur l'axe x plutôt que l'axe z) revient à une simple rotation de nos sphères.

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

